

分类号 _____

U D C _____

密 级 _____

编 号 10486

武汉大学

硕 士 学 位 论 文

GNSS RTK/INS/车载辅助信息紧组合
多源导航定位算法研究

研 究 生 姓 名 : 吴佳豪

学 号 : 2016206180008

指导教师姓名、职称 : 牛小骥 教授

专 业 名 称 : 导航、制导与控制

研 究 方 向 : 组合导航与信息融合

二〇一九年四月

Research on GNSS RTK/INS/Vehicle Auxiliary Information Tightly-Coupled Multi-source Navigation and Positioning Algorithm

By

Wu Jiahao

Supervised by

Prof. Niu Xiaoji

Wuhan University

Wuhan, 430079, P. R. China

April, 2019

论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者（签名）：

年 月 日

摘要

全球导航卫星系统 (GNSS) 与惯性导航系统 (INS) 具有互补特性, 可以通过组合获取连续稳定、高频率和高精度的导航结果。利用载波相位差分技术 (RTK), 在开阔环境中可以较为容易的获取厘米级精度定位结果, 但在复杂的城市综合环境下, GNSS 信号容易受到遮挡、干扰和多路径影响, 使得整周模糊度解算与周跳探测与处理受到影响, 定位结果容易出现较大偏差甚至中断。INS 辅助 RTK 具有如下优势, 1) 改善系统精度; 2) 提高系统的抗干扰能力和稳健性; 3) INS 辅助进行粗差剔除、周跳探测和模糊度重新固定。但在 GNSS 长时间中断时, INS 导航精度会随时间发散, 而车辆辅助信息 (包括车辆运动约束和车辆运动传感器等) 可以有有效的抑制 INS 发散问题, 提高系统的精度, 进而增强 RTK 周跳探测和模糊度固定的稳健性。此外紧组合可以提供精确的 INS 先验信息, 合理利用抗差自适应模型可以有效改善紧组合算法的可用性和可靠性。

目前, 公开发表的有关车载辅助信息约束的 GNSS 精密定位紧组合的研究文献十分有限, 针对复杂环境下抗差自适应模型改进的紧组合研究较少, 多数研究集中在仿真验证紧组合性能方面, 缺乏实测数据的测试分析的情况。本文系统设计与研究了 GNSS RTK/INS 紧组合算法, 增加了车载辅助信息与抗差自适应模型进一步提高精度和可靠性, 开发了相应的数据处理软件, 同时深入分析了 GNSS RTK/INS 紧组合的性能, 本文的主要研究内容与成果如下:

1. 在紧组合算法中充分利用零速修正、零速航向锁定、非完整性约束、里程计等车载辅助信息, 分析其对导航精度和模糊度固定性能的影响。实验结果表明车载辅助信息对于紧组合在 GNSS 信号中断期间导航误差漂移具有显著的抑制作用, 同时可以加快 GNSS 信号中断后的模糊度恢复。
2. 设计实现了 GNSS RTK/INS 紧组合算法, 包括系统状态方程与观测方程。实现了基于 GF 与 MW 组合观测值的 INS 辅助周跳探测方案以及 INS 辅助模糊度固定方案, 并利用抗差自适应滤波模型改进算法, 改善了算法在复杂环境下的可用性和可靠性。
3. 使用实测数据验证了 GNSS RTK/INS 紧组合算法正确性以及抗差自适应模型的性能改进, 通过对实测数据整体统计与仿真中断的形式考察分析了算法的基本性能、模糊度固定率、重新固定速度, 以及复杂环境性能表现等。结果表明, 相较于 GNSS, INS 辅助 GNSS RTK 的紧组合可以在一定程度上改善常规城市环境周跳探测与模糊度固定效果。在普通 RTK/INS 紧组合基础上, 抗差自适应模型改进的紧组合可以进一步提升城市环境下的模糊度固定率与导航精度, 实测统计结果表明, 使用抗差自适应模型改进后, 对于中等精度 MEMS IMU, 在常规城市环境中模糊度固定率增加了 8.96%,

三维位置精度改善比例为 18.98%。

关键词：RTK；INS；紧组合；周跳探测；模糊度固定；车载辅助信息；抗差自适应滤波；

ABSTRACT

Global Navigation Satellite System (GNSS) and Inertial Navigation System (INS) have complementary advantages, which can be combined to obtain continuous, stable, high frequency and high accuracy navigation results. It is easy to obtain centimeter-level positioning results in an open environment using real-time kinematic (RTK), but in complex urban environments, GNSS signals are easily interrupted by occlusion, interference and multipath. This will affect the estimation of ambiguity and cycle-slip detection, which will cause large position error or even interruption of the positioning result. INS can play a crucial part in gross error rejection, cycle slip detection and reliable and rapid ambiguity resolution. Using INS to assist RTK has the following advantages: 1) improving system accuracy; 2) improving system's anti-interference capability and robustness; 3) providing continuous stable results. However, when GNSS is interrupted for a long time, INS navigation accuracy will deteriorate over time. Vehicle auxiliary information (including vehicle motion constraints and vehicle motion sensors) can effectively suppress INS divergence, improve system accuracy, and then enhance the robustness of RTK cycle slip detection and ambiguity resolution. In addition, tight coupling can provide precise prior information of INS, using robust and adaptive model rationally can effectively improve the availability and reliability of tight coupling.

Currently, many satellite navigation systems are promoting global networking of navigation satellites actively. It will increase the redundancy of GNSS satellites, and improve positioning performance and improve reliability and availability in complex environments. The published literature on tight coupling with vehicle auxiliary information constraints are very limited. There are few researches on tight coupling of robust and adaptive models in complex environments. A lot of researches focus on the simulation of tight coupling performance. Test and analysis of measured data are lacking. This paper introduces RTK positioning algorithm, carries out some researches on the GNSS RTK/INS tight coupling algorithm systematically, adds vehicle auxiliary information, robust and adaptive model to increase accuracy and reliability further, develops corresponding data processing software. At the same time, the performance of GNSS RTK/INS tight coupling is analyzed in detailed. The main research contents and results are as follows.

1. Making full use of vehicle auxiliary information including ZUPT, ZARU, NHC, Odometer and etc. Analyzing the effects of these method on navigation accuracy and ambiguity resolution. The experimental results show that vehicle auxiliary

information can restrain the error drift of tight coupling during the interruption of GNSS signal, and accelerate the recovery of ambiguity after the interruption of GNSS signal.

2. Design and implementation of GNSS RTK/INS tight coupling algorithm, including system state equation and measurement equation. Using INS-aided cycle slip detection based on GF and MW combination and INS-aided ambiguity resolution. Improving the algorithm using robust and adaptive filter model, it increases the availability and reliability of the algorithm in complex environment.
3. Using measured data to verify the correctness of GNSS RTK/INS tight coupling algorithm, the performance improvement of the robust and adaptive model in the form of overall statistics and simulation interruption. The basic performance, ambiguity fixed rate, ambiguity resolution recovery speed, and performance in complex environment are analyzed through the form of simulation signal interruption and measured data statistics. The results show that, Compared with GNSS, the tight coupling of INS-aided GNSS RTK can improve the effect of cycle slip detection and ambiguity resolution in conventional urban environment. On the basis of conventional RTK/INS tight coupling, the robust and adaptive model tight coupling can improve ambiguity fixed rate and navigation accuracy in urban environment further. Statistical results show that ambiguity fixed rate increases by 8.96% and three-dimensional position accuracy improves by 18.98% with the improved robust and adaptive model.

Keywords: RTK; INS; Tight-Coupling; Cycle Slip Detection; Ambiguity Resolution; Vehicle Auxiliary Information; Robust and Adaptive Filtering;

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
1. 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 选题背景与意义	2
1.3 国内外现状与发展趋势	3
1.4 研究目标与内容	6
2. 捷联惯性导航基础理论	7
2.1 导航常用坐标系及转换	7
2.2 捷联惯性导航算法	10
2.2.1 IMU 误差及校正	11
2.2.2 速度更新方程	12
2.2.3 位置更新方程	14
2.2.4 姿态更新方程	14
2.3 惯性导航算法误差	15
2.3.1 速度误差方程	16
2.3.2 位置误差方程	16
2.3.3 姿态误差方程	17
2.4 本章小结	17
3. 载波相位相对定位理论	18
3.1 载波相位相对定位原理	18
3.2 常用观测值及其线性组合	19
3.2.1 原始观测值	19
3.2.2 站间单差观测值	19
3.2.3 站星双差观测值	20
3.2.4 线性组合观测值	21
3.3 随机模型	23
3.4 载波相位相对定位误差来源	24
3.5 周跳探测与处理	25
3.5.1 周跳探测方法	25

3.5.2 周跳修复处理	26
3.6 整周模糊度解算	26
3.6.1 模糊度浮点解估计	27
3.6.2 模糊度搜索	27
3.6.3 模糊度确认	28
3.7 本章小结	29
4. RTK/INS 紧组合算法原理及软件设计	30
4.1 卡尔曼滤波原理	30
4.2 RTK 组合导航算法原理	31
4.2.1 系统状态方程	31
4.2.2 系统观测方程	32
4.2.3 估计误差反馈	34
4.3 INS 辅助周跳探测与处理	35
4.3.1 周跳探测方法	35
4.3.2 周跳处理方法	37
4.4 INS 辅助模糊度固定	38
4.4.1 解算方法	38
4.4.2 INS 精度对模糊度解算影响	39
4.5 车载辅助信息	41
4.5.1 零速修正	41
4.5.2 零速姿态锁定	42
4.5.3 非完整性约束	42
4.5.4 里程计辅助	43
4.5.5 双天线航向辅助	43
4.6 抗差自适应滤波模型	44
4.6.1 抗差模型	44
4.6.2 自适应模型	45
4.7 算法结构设计	47
4.8 本章小结	49
5. RTK/INS 紧组合车载实验与分析	50
5.1 实验设备及参数	50
5.2 RTK/INS 紧组合性能分析评估方法	51

5.3 RTK 紧组合性能验证与分析	51
5.3.1 开阔环境无车载辅助测试.....	51
5.3.2 开阔环境 NHC 辅助测试	55
5.3.3 开阔环境 NHC 与 ODO 辅助测试.....	57
5.3.4 城市环境测试.....	58
5.4 本章小结	64
总 结.....	65
参考文献.....	67
致谢	72

1. 绪论

1.1 引言

导航是通过无线电信号、空间几何关系、天文信息、地理信息等手段确定载体位置并规划运动航线的技术方法(Groves, 2013), 其包含了确定运载体相对于已知参考系的位置速度和由一处去往另一处航线的规划和保持两个概念。导航技术是自动确定位置和速度的方法, 可以有人参与或自动实现。导航系统是提供部分或全部的位置、速度、姿态、加速度和角速度等导航信息的装置, 也称作辅助导航设备。随着现代社会的发展, 人们对导航定位的需求日益增加, 目前导航技术广泛应用于在交通、测绘、农业、商业和军事等领域, 其已经成为现代社会产生、获取、传递时空信息的重要手段, 它伴随着人们对时间和空间信息的探索挖掘而融入了人们生活的方方面面。

导航随着人类政治、经济和军事等活动的产生而产生, 并随着人类活动范围的扩大、所使用的交通工具的改进而不断发展。随着技术的不断进步, 导航定位技术也在不断的涌现、更新和发展, 其包括航位推算、惯性导航、无线电导航、卫星导航、重力/磁力匹配导航、视觉导航等。卫星导航技术及惯性导航技术是其中具有代表性的技术。美国主导研制建成的全球定位系统(Global Positioning System, GPS) 可为全球各种环境下各类军民载体, 全时段提供高精度的定位、测速和精密授时服务, 是最为成熟且影响深远的卫星导航系统(Parkinson et al, 1996; Misra and Enge, 2006; Hofmann-Wellenhof et al., 2007), 考虑到卫星导航系统的广泛用途和安全保障, 多个国家也先后建设了独立的全球卫星导航定位系统, 其中包括俄罗斯 GLONASS 系统, 中国 BDS 系统, 欧盟 GALILEO 系统, 它们与 GPS 一起组成了全球导航卫星系统(Global Navigation Satellites System, GNSS), 此外, 各地也在积极建设区域卫星导航系统与卫星导航增强系统。GNSS 的出现给导航领域带来了巨大的变化, 导航定位技术应用更为普及和广泛。惯性导航技术早期曾用于二战中 V2 火箭制导, 随着军事、民用需求的增加和微电子机械、光学技术的发展, 惯性导航技术正不断普及, 惯性导航系统(Inertial Navigation System, INS) 应用条件与成本不断降低。INS 基于经典牛顿力学定律, 使用惯性传感器(陀螺仪和加表) 测量运动载体在惯性空间的平动和转动, 通过相应的算法计算出运动载体运动的速度、位置和姿态信息。INS 可以连续地提供高频率的导航结果, 广泛应用于军事武器制导、机载车载导航, 移动测绘等领域(Chatfield, 1997; Britting, 2010)。

任何导航技术方法或手段都有其优势, 但随着应用场景、环境因素等条件的变化, 各类导航技术都会存在一定的局限性。而将多种导航系统以适当的方式进行组合, 可以使其优势互补, 弥补不足, 使性能优于单一导航系统。GNSS 的主要优势是用户设备成本低, 长期定位精度高, 定位误差不随时间累计, 但其缺点也较为显

著, 在高动态条件下信号易失锁, 有源, 非自主, 采样率低, 信号易受偶然或蓄意的干扰, 包括建筑物、地形和树木遮挡、削弱和反射, 以及电子干扰和政策干预, 使得连续性不足(Groves, 2013)。INS 的优势是自主稳定、不易受到干扰、可以获取连续高带宽的导航结果, 短期噪声低, 能够在提供速度、位置的同时, 提供姿态、角速度和加速度测量值, 其缺点是导航精度随时间增长而降低, 预热和初始对准时间较长, 研制高精度的 INS 所需成本较高(Titterton and Weston, 2004)。对二者进行组合可以发挥两种系统的优势, 并相互弥补不足(Farrell and Barth, 1999)。GNSS/INS 组合导航的优势主要包括, 1)利用长期精度高的 GNSS 定位结果校正惯性导航机械编排结果, 以抑制 INS 中由于惯性器件的误差积累导致的导航结果发散, INS 提供的高频的短期精度高的连续导航结果, 可以在高动态条件下为 GNSS 提供辅助信息, 利于 GNSS 接收机对信号的跟踪, 从而增加导航的精度、连续性和稳定性; 2)可以提供包括速度、位置和姿态在内的较为充分、完备和高性能的导航信息; 3)在短期环境干扰严重时提供较为连续稳定的导航结果; 4)在保证各项性能的同时, 降低整个导航系统的成本。GNSS/INS 组合导航已在广泛的应用中表现出显著优势。

1.2 选题背景与意义

GNSS 与 INS 具有较强的互补优势, 将二者进行有效组合可以显著改善导航性能(Titterton and Weston, 2004; Kaplan and Hegarty, 2005)。从传感器信号的组合方式上主要可以分为松组合、紧组合与深组合(Noureldin, 2013; Groves, 2013)。松组合中 GNSS 单独计算位置与速度, 利用惯导算法与误差模型传递状态方程, GNSS 导航结果与 INS 推算结果构成组合卡尔曼滤波器观测值进行滤波估计。紧组合中 INS 推算的导航结果和 GNSS 原始的伪距和载波相位等观测值进行统一的滤波。深组合利用 INS 辅助 GNSS 接收机接收码相环路, 属于硬件层面的组合。紧组合相较于松组合, 在少于四颗卫星时, GNSS 观测值仍可参与解算; INS 输出的推算结果可以辅助 GNSS 进行周跳探测与模糊度重新固定; 观测值之间不相关, 便于进行粗差探测, 可以提高系统鲁棒性 (Grewal and Andrews, 2008; Groves, 2013)。

组合导航在移动测绘、智能交通、航空航天、军事、农业等领域的应用日益广泛。特别是在民用的智能交通领域, 其对导航信息的实时性、连续性和鲁棒性提出了很高的要求, 如智能驾驶领域对导航信息的要求在 10ms, 10cm 量级。利用 GNSS/INS 组合导航技术可以获取完备的三维导航信息, 包括速度、位置和姿态等信息, 其已成为最具代表性的导航定位技术之一。松组合技术利用 GNSS 位置和速度信息辅助 INS, 虽然也能提供上述信息, 但在 GNSS 系统受到较为严重的遮挡或干扰时, 其导航精度保持能力较为依赖惯性器件精度, 难以长时间保持合理精度。RTK 定位可用于实现厘米级的快速定位, 其需要在定位过程中实现整周模糊度的

固定及周跳的探测。在观测环境良好时,上述较为容易实现。但在复杂环境或者机动条件剧烈场景中,GNSS 信号容易被障碍物遮挡或受到外界干扰,接收机难以连续稳定跟踪 GNSS 信号,从而使观测值出现周跳,整周模糊度需要重新固定,影响定位结果。在大机动场景下,由于周跳表现多样,单独利用 GNSS 难以探测和处理所有周跳。同时错误固定整周模糊度将导致更大的定位误差,影响导航系统的精度与可靠性。INS 具备短期精度高的特点,可以在卫星信号微弱或中断情况下,进行短期的预测保持,可以支持周跳探测,实现模糊度的快速重新解算,改善系统的可靠性和可用性(Petovello et al., 2003; 韩厚增, 2017; 刘帅, 2016)。GNSS RTK/INS 紧组合可以充分利用 INS 信息辅助模糊度固定与周跳探测,同时高精度的载波相位差分观测值可以更好地修正 INS 的漂移误差,改善系统精度。车载场景下,可以利用多种信息辅助 GNSS/INS 组合导航,这些信息主要分为自身约束信息与外部传感器信息,其可在组合导航的基础上进一步改善导航性能。在紧组合算法中构建抗差自适应滤波模型可以充分利用紧组合处理原始观测值的优势,有利于减小模型误差与观测粗差带来的影响,增强组合导航系统的可用性和可靠性。

多系统的卫星导航系统可以对 GNSS 起到很好的扩充作用,随着各国各地区卫星导航系统的发展,我们正逐步从单一的 GPS 系统过渡到多系统多星座并存的全球导航卫星系统。多系统多星座可以提供更多的可见卫星,带来更好的卫星分布几何结构,这将显著提升卫星定位的精度、稳定性和可用性,特别是在复杂观测环境中。我国的北斗系统将实施“三步走”的发展战略,2012 年实现亚太地区的区域覆盖能力,2020 年将形成全球覆盖能力,支持北斗解算的紧组合数据处理软件契合了北斗系统的发展需求。

本文在上述背景与意义基础上,研究了 GNSS RTK/INS 紧组合算法,设计开发了相应的紧组合软件,并利用实测开阔与城市环境数据结合多源车载辅助信息对算法性能进行了充分验证与分析。

1.3 国内外现状与发展趋势

卫星导航与惯性导航的组合按照组合深度(信息融合所采用的卫星接收机数据来源)的不同,可将组合系统分为三类,松组合、紧组合和深组合。不同的组合方式决定了不同的工程实现难度和导航定位精度。其中松组合与紧组合是对观测数据进行算法组合,深组合属于软硬件的一体化组合。松组合使用 GNSS 滤波和 INS 推算输出的位置和速度信息作为组合滤波器的输入,其中 GNSS 滤波器与组合滤波器分离,因此有 GNSS 与组合导航两套导航输出结果,结构较为简单,稳定性高,算法容易实现,国内外发展都较早,目前算法较为成熟(Shin, 2005; 严恭敏, 2006),但是在信号受到遮挡或干扰时则完全依赖 INS,组合滤波器无法进行观测

更新, 且 GNSS 滤波器输出结果与时间相关, 作为组合滤波器输入时不利于卡尔曼状态估计。紧组合使用 GNSS 输出的伪距和载波相位观测值和 INS 推算输出作为组合滤波器的输入, 其需要在 GNSS 滤波算法中融合 INS 推算信息, 算法较松组合复杂一些, 且增广的状态量可能导致滤波器稳定性有所降低, 但在 GNSS 卫星数少于四颗时短时间内仍可维持部分观测更新, 并且统一的组合滤波器解决了两个滤波器带来的相关性和统计问题, 因此精度和鲁棒性优于松组合。其中基于伪距和伪距率的紧组合较容易实现, 国内外均有相关研究(Yang, 2008; 刘川川, 2012; 程亚豪, 2013), 基于载波相位层面的紧组合在复杂环境中涉及周跳探测与模糊度固定问题, 算法实现较为复杂, 国内对紧组合算法的研究较少, 但近年来也出现了一些相关研究(谢宏飞, 2013; 高周正, 2016; 刘帅, 2016; 韩厚增, 2017)。国外相关研究起步较早(Petovello, 2003; Wu, 2003), Applanix 和 Novatel 等公司相继推出了以 POSPac, Inertial Explorer 为代表的基于载波相位的紧组合商业数据处理软件, 但是其核心技术不公开。深组合使用 INS 与卫星接收机信号相关器输出的同相和正交信号进行数据融合, 利用 INS 辅助接收机进行跟踪和捕获, 可以实现在低环路噪声时提高环路带宽, 改善动态性能和抗干扰能力, 国外研究起步较早, 并有广泛深入的研究, 目前国内深组合研究主要停留在系统结构设计与仿真验证阶段(牛小骥, 2015)。

在利用载波相位相对定位技术获取高精度厘米级定位结果时, 周跳探测与整周模糊度固定是其中的关键问题, 厘米级定位结果可以修正 INS 的漂移误差, 同时可以利用 INS 短期精度高的特点, 推算得到的厘米级高精度定位结果可用于辅助 GNSS 载波相位周跳探测与模糊度固定。紧组合算法研究主要集中在两个部分, 包括算法开发及系统性能分析和惯导辅助周跳探测与模糊度重新固定。要实现 GNSS 高精度定位与系统稳定性, 必须对载波相位周跳进行精准探测。相关领域提出了多种周跳探测方案, 按照原理可分为基于观测值随时间变化规律、观测值估计残差以及不同观测值组合等三类方法(李征航和张小红, 2009)。常见的包括高次差法、多项式拟合法、三次差法、伪距相位比较法、多普勒积分法等。但这些方法主要基于 GNSS 观测数据, 受到接收机质量及大气条件等各种误差制约, 难以探测和处理小于 1 周的周跳, 并且易受到动态影响。而在 GNSS/INS 组合导航中, INS 可以给出短期精度高的载体运动状态信息, 其对动态非常敏感, 适合用于周跳探测(Lee et al., 2003; 韩厚增, 2017; 谢宏飞, 2013)。

Scherzinger(2000)介绍了 Applanix POS 系统中采用的载波相位紧组合算法策略, 并用实测数据初步测试了算法, 结果显示 INS 辅助 RTK 在 GPS 信号中断内对于快速恢复整周模糊度具有显著效果, 文章讨论了影响整周模糊度快速恢复的最长 GNSS 信号中断时间以及中断期间位置精度的因素。Wu(2003)介绍并对比分析了 INS 辅助分散滤波、INS 观测辅助模糊度固定与模糊度状态扩维集中滤

波等惯导辅助模糊度固定算法,结果显示将模糊度进行状态扩维作为状态量的集中式滤波算法性能最优。孙红星(2004)研究了相对定位 GPS/INS 高精度组合理论以及多源传感器融合理论,并在移动测图系统中进行了实践。Petovello(2003)通过仿真 GNSS 信号中断,对比分析了卫星导航、松组合和紧组合的速度、位置误差和模糊度重新固定时间,证明了 GNSS 信号失锁后惯导辅助可以加快模糊度重新固定过程,紧组合结果显著优于卫星导航和松组合。Kennedy(2006)介绍了 NovAtel SPAN 的系统结构,并利用城市综合环境数据比较了松组合与载波相位差分紧组合的性能,结果表明紧组合的抗差性能明显优于松组合。谢宏飞(2013)研究了惯导辅助模糊度重新固定的三种算法,通过模糊度精度衰减因子考察了在不同惯导位置精度下三种方法模糊度固定效果。李团(2016)研究了在 GPS 与 BDS 双系统下的 RTK/INS 紧组合算法,并利用实测数据进行了验证分析。韩厚增(2017)研究了 BDS/GPS 融合高精度定位模型,实现了利用 INS 辅助周跳探测与修复、BDS/GPS 单频/双频模糊度固定。

车载场景下,可以利用车辆约束信息(如零速修正、零速航向锁定和非完整性约束等)与外部传感器信息(如里程计、双天线、CAN BUS 传感器、气压计和磁力计等)辅助 GNSS/INS 组合导航。这些信息在 GNSS 信号中断时对 INS 的漂移误差有较好的抑制作用。高钟毓(1995)研究了车载惯性导航系统中几种零速修正的估计方法。Niu(2007)研究了三维速度辅助信息在车载 MEMS IMU 组合导航中的应用。Shin(2005)利用外部航向信息在 GNSS/INS 组合算法中构建了航向观测模型。车载辅助信息的充分利用将进一步改善 GNSS/INS 组合导航的性能。

利用标准卡尔曼滤波获得最优估计的前提是动力学和观测模型准确,且系统噪声与观测噪声为互不相关的无偏高斯白噪声(秦永元, 2014)。但在实际应用中,组合导航系统容易受到大机动条件和卫星信号干扰的影响,使得最优估计条件难以满足。利用抗差和自适应的滤波模型将有效改善滤波条件,有助于准确处理异常数据。杨元喜(2006)基于自由极值原理推导了抗差自适应滤波的通用公式,表明通过自适应因子与观测等价矩阵可以转换得到不同的滤波方式。吴富梅(2010)基于状态不符值与预报残差构造自适应因子,在松组合与紧组合中进行了应用。吴云(2015)基于极大验后准则推导了次优无偏极大验后估计器,将其中参数替换转换为 Sage-Husa 估计方法,指出自适应卡尔曼滤波很多是在上述思想上的变形。

目前,单独对载波相位相对定位紧组合算法开发及性能分析、车载辅助信息使用、惯导辅助周跳探测与模糊度重新固定、紧组合抗差自适应滤波的研究较多。但是,基于多源车载辅助以及抗差自适应改进的 GNSS/INS 紧组合研究较少,多数研究缺乏相关算法结构和技术设计细节,并且一般通过仿真卫星信号失锁评估紧组合性能,缺乏城市等综合环境实测数据的分析评估,因此难以验证算法的有效性。

1.4 研究目标与内容

本文的研究目标主要是 GNSS RTK/INS 紧组合算法设计与软件开发，然后利用实测车载组合导航数据验证紧组合算法的性能，分析算法在不同场景下的表现。具体内容为：(1)实现惯性导航算法和 RTK 定位算法；(2)设计实现 GNSS RTK/INS 紧组合卡尔曼滤波算法，建立系统状态模型和观测模型；(3)实现惯导辅助周跳探测和模糊度重新固定、车载信息辅助组合导航、紧组合抗差自适应滤波；(4)通过实测数据验证和分析紧组合算法的基本性能以及综合环境下的性能。

基于上述研究目标，论文的各章节编排如下：

第一章阐述论文的背景和意义，总结国内外基于载波相位相对定位紧组合算法的研究情况与发展趋势，给出本文的研究目标和研究内容。

第二章介绍惯性导航基础理论。包括导航常用坐标系及转换关系，数学基本概念，推导惯性导航算法，分析惯导算法误差。

第三章描述载波相位动态相对定位原理。首先引出 GNSS 载波相位测量和相对定位原理，其次介绍常用的卫星导航观测值和组合观测值，再者给出载波相位相对定位中的随机模型，然后分析载波相位相对定位误差，最后简要给出 GNSS 定位中周跳探测与整周模糊度解算的一般方法。

第四章推导 GNSS RTK/INS 紧组合算法。首先给出标准卡尔曼滤波的基本流程和公式。其次推导 GNSS RTK/INS 紧组合方程，包括系统状态方程与观测方程设计。再者阐述惯导辅助周跳探测与模糊度重新固定方案，然后推导车载辅助信息约束以及抗差自适应滤波模型，最后总结紧组合算法流程与结构设计。

第五章使用实测数据测试紧组合性能，与参考结果进行对比分析，对速度、位置和姿态漂移误差，模糊度固定率和 GNSS 信号中断恢复收敛时间，复杂环境紧组合性能进行分析。

第六章总结与规划。总结研究内容，并对后续研究进行规划。

2. 捷联惯性导航基础理论

2.1 导航常用坐标系及转换

惯性导航中常用的坐标系包括惯性坐标系、地球坐标系、导航坐标系和载体坐标系，下面对它们进行介绍。

惯性坐标系（ i 系）定义不唯一，一般指相对于银河系或宇宙相对位置不变的坐标系，惯性导航一般使用地心惯性坐标系，其并非绝对的惯性坐标系，但地球质心绕太阳公转和太阳系绕银河系公转的影响远小于惯导的噪声水平，可视为一般的惯性坐标系，其坐标原点为地球质心， Z 轴为地球自转轴指向北极， X 轴位于赤道面指向平均春分点， Y 轴与 X 轴构成右手系。该坐标系不随地球转动。 n 系下地球自转角速度、 n 系相对于 e 系角速度可表示如下：

$$\begin{aligned}\omega_{ie}^n &= [\omega_e \cos \varphi \quad 0 \quad -\omega_e \sin \varphi]^T \\ \omega_{en}^n &= [v_E / (R_N + h) \quad -v_N / (R_M + h) \quad -v_E \tan \varphi / (R_N + h)]^T\end{aligned}\quad (2.1)$$

地球坐标系（ e 系），也称为地心地固坐标系（Earth-Center-Earth-Fixed, ECEF），以地球质心为中心， Z 轴是地球自转轴指向北极， X 轴从地心指向赤道与参考子午线的交点， Y 轴与其构成右手系。常用来表征载体相对于地球的运动情况。 ω_e 表示地球自转角速度值， e 系下地球自转角速度可表示如下：

$$\omega_{ie}^e = [0 \quad 0 \quad \omega_e]^T \quad (2.2)$$

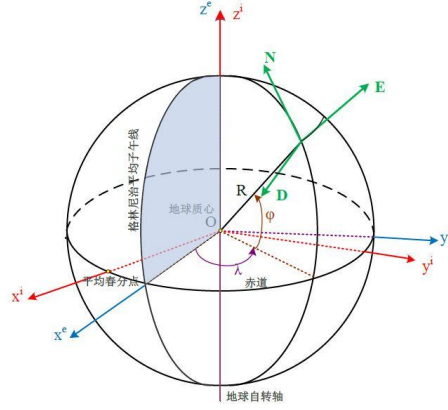
e 系下直角坐标可用式(2.3)表示， φ 为纬度， λ 为经度， h 为椭球高， e 表示参考椭球第一偏心率， R_N 是卯酉圈曲率半径， R_M 是子午圈曲率半径，下文同。

$$\begin{cases} x = (R_N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y = (R_N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z = [R_N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{cases} \quad (2.3)$$

导航坐标系（ n 系）为导航解算时的参考系，一般使用当地地理水平坐标系（Local-Level-Frame, LLF），其坐标原点为导航对象上的一点，即运动载体的质心， Z 轴为参考椭球体的法线方向， X 轴在垂直于 Z 轴的平面内从用户指向北极的方向， Y 轴指向东方。北东地为当地导航坐标系中的最常采用的形式，同时东北天形式的坐标系也常被采用。可以通过方向余弦矩阵将坐标从导航系转换到地球系，转换矩阵表示如下：

$$C_n^e = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

图 2.1 表现了 n 系、 e 系和 i 系的关系，


 图 2.1 n 系、 e 系和 i 系示意图

载体坐标系 (b 系), 原点一般是指惯导设备的质心, 惯导设备安装在载体上后, 坐标轴便与载体固连, 通常定义 Z 轴为地向, X 轴指向载体前向, Y 轴指向载体右向, 此坐标系也称为前右下 (Forward-Right-Down, FRD) 坐标系。对于角运动来说, 上述三轴分别代表航向、横滚和俯仰。载体坐标系是描述导航对象自身运动的坐标系。捷联惯性传感器测量载体相对于 i 系的运动。

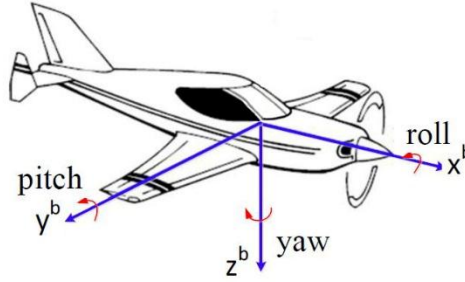


图 2.2 载体坐标系示意图

从 n 系到 b 系的方向余弦矩阵 (Direction Cosine Matrix, DCM) 可以定义如下 (Titterton and Weston, 2004),

$$C_n^b = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) \quad (2.5)$$

式中, ϕ 、 θ 、 ψ 分别表示横滚、俯仰和航向。某坐标系到其它坐标系的变换, 可以通过绕不同坐标轴的三次连续转动来实现。而三次转动可以表述为三个独立的方向余弦矩阵, 利用方向余弦矩阵的性质可以计算从 b 系到 n 系的方向余弦矩阵, $C_b^n = (C_n^b)^T$

$$\begin{aligned} &= R_z(-\psi)R_y(-\theta)R_x(-\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

计算坐标系 (c 系) 是 INS 计算时假设的导航坐标系, 其利用载体位置 (经度、

纬度) 计算。该系与实际导航系之间存在一个位置误差角, 用等效旋转矢量表示为 $\delta\theta$, 如图 2.3 所示。

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\lambda \cos \varphi \\ -\delta\varphi \\ -\delta\lambda \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta r_E / (R_N + h) \\ -\delta r_N / (R_M + h) \\ -\delta r_E \tan \varphi / (R_N + h) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

其中, δr_N 表示北向位置误差, δr_E 表示东向位置误差, $\delta\varphi$ 、 $\delta\lambda$ 分别为 c 系与 n 系角度差异带来的纬度差和经度差。

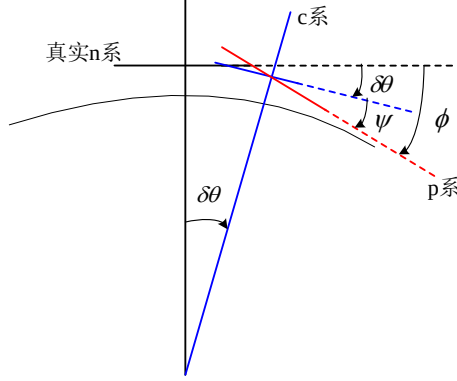


图 2.3 n 系、 c 系、 p 系之间关系示意图

平台坐标系 (p 系) 是指利用陀螺仪感应的角速度与加表感应的加速度转换的坐标系, 由图 2.3 可知其与真实导航系存在姿态误差角, 用等效旋转矢量表示为 ϕ 。由 p 系定义可知, 在导航解算中从 b 系到 n 系的方向余弦矩阵 $\hat{C}_b^n$ 等同于从 b 系到 p 系的方向余弦矩阵 C_b^p , 关系式表示如下:

$$\hat{C}_b^n = C_b^p = C_n^p C_b^n \quad (2.8)$$

$\hat{C}_b^n$ 上标表示计算值。

当角度误差较小时, c 系到 p 系方向余弦矩阵 C_c^p , 真实 n 系到 p 系方向余弦矩阵 C_n^p , 真实 n 系到 c 系方向余弦矩阵 C_n^c 可分别表示如下:

$$C_c^p = I - (\psi \times) \quad (2.9)$$

$$C_n^p = I - (\phi \times) \quad (2.10)$$

$$C_n^c = I - (\delta\theta \times) \quad (2.11)$$

由于 $C_n^p = C_c^p C_n^c$, 取一阶项可得,

$$\phi = \psi + \delta\theta \quad (2.12)$$

导航中提到的坐标系的线运动和角运动都是相对于其他坐标系而言的, 它们一般涉及三种坐标系, 目标坐标系 α 、参考坐标系 β 和投影坐标系 γ 。这里采用以下符号 $X_{\beta\alpha}^\gamma$ 表示速度、位置、加速度和角速度, 其表示矢量 X , 在投影系 γ 下, 描述了目标系 α , 相对于参考系 β 的运动。常用的坐标系转换表达方法包括欧拉角、坐标转换矩阵、四元数和旋转矢量。

欧拉角, 可表示姿态角, 简单明了, 概念直观, 容易理解, 但方程中包含有三角运算, 这给实时计算带来一定困难。由于欧拉角的多值性、奇异值问题, 欧拉角

旋转的逆变换、连续变换问题，此方法适合用于水平方向姿态无剧烈变化的情形，难以满足三维姿态确定的需求。

坐标转换矩阵为 3×3 的矩阵，用符号 C_{α}^{β} 表示，下标表示源坐标系 α ，上标表示转换坐标系 β ，用于表示某矢量从某投影坐标系到其它投影坐标系的转换，矩阵的列表示，载体坐标系中的单位矢量在参考坐标系中的投影。即 $X_{\beta\alpha}^{\gamma} = C_{\delta}^{\gamma} X_{\beta\alpha}^{\delta}$ ，其中 X 为任意矢量。坐标转换矩阵中每个元素分别对应各个轴间夹角余弦值，可通过两坐标系的单位矢量进行点乘得到，因此坐标转换矩阵也称为方向余弦矩阵，它避免了奇异值的问题，满足三维姿态确定的需求，但方程包含未知量较多，计算复杂，不适合实时计算。

四元数是指由四个元素组成的超复数表示一次转动，表示为 $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ ，其中 q_0 表示转动的幅度，其他三个元素表示转动的旋转轴。算法简单，计算量小，效率高。但其运算不具有直观性，会使导航方程的运算难以理解，增加出错概率。同时在进行姿态更新时，会引入不可交换误差，在载体进行大机动时，不可交换误差就会放大，需要利用等效旋转矢量对其进行改进。四元数法对应为旋转矢量法中的单子样算法，其对有限转动引起的不可交换误差不能充分补偿，不适合于高动态载体的姿态解算。 n 系到 e 系转换四元数可表示如下：

$$q_n^e = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda/2) \\ -\sin(-\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda/2) \\ \sin(-\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda/2) \\ \cos(-\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda/2) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

旋转矢量为三维矢量，旋转矢量方向表示坐标轴转向，幅值给出了转动角度的大小。但旋转矢量的运算在导航方程中不直观。旋转矢量法使用多子样算法，可以对不可交换误差进行有效补偿，算法简单，易于操作，经过系数优化处理后，算法漂移在相同子样算法中达到最小，对于存在剧烈角振动或频繁角运动的载体姿态解算应用较多。

2.2 捷联惯性导航算法

惯性导航系统(INS)建立在牛顿第二运动定律的基础上。它利用惯性测量单元(Inertial Measurement Unit, IMU)测量载体相对于惯性空间的转动和平动，由载体初始导航状态，可以逐步推算后续时刻载体导航状态。根据系统结构与建立导航坐标系方式的不同，惯导系统分为捷联式和平台式。捷联惯导系统(Strapdown Inertial Navigation System, SINS)将惯性传感器固定在运动载体上，利用数学平台进行惯导解算，避免了机械平台的复杂性，和平台式惯导比较，具有成本低、体积小、易安装和稳定性高的优势，此外，微电子机械系统和计算机技术的不断发展，使得捷联

下式为惯导微分方程,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}^n \\ \dot{C}_n^e \\ \dot{h} \\ \dot{C}_b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_b^n f^b + g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n \\ C_n^e (\omega_{en}^n \times) \\ -v_D \\ C_b^n (\omega_b^n \times) - (\omega_{jn}^n \times) C_b^n \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

其中, v^n 是 n 系下的载体速度, f^b 是 IMU 输出的比力, g^n 是当地重力加速度在 n 系下的投影, ω_{ie}^n 是 e 系关于 i 系的旋转角速度在 n 系下的投影, ω_{en}^n 是 n 系关于 e 系的旋转角速度在 n 系下的投影, v_D 为 n 系下的垂向速度, ω_{in}^n 是 n 系关于 i 系的旋转角速度在 n 系下的投影。

导航系下捷联惯导机械编排的流程如下所示,

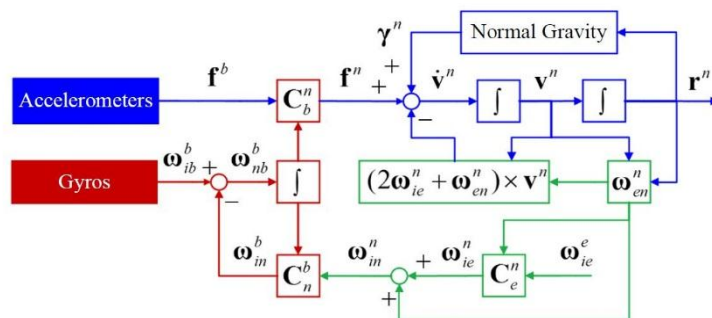


图 2.4 捷联惯导机械编排示意图

在捷联惯导的惯导算法启动前,需要进行初始化工作。需要初始化的变量包括载体速度、位置、姿态,载体系转导航系四元数 q_b^n ,导航系转地球系四元数 q_n^e ,姿态方向余弦矩阵 C_b^n ,上历元速度增量 $\delta \mathbf{v}$ 。主要通过初始对准来完成导航状态的初始化。

2.2.1 IMU 误差及校正

1) IMU 误差

由连续时间的 INS 机械编排动态方程可推导离散时间的 INS 机械编排方程。

大部分高等级的 IMU 为了实现所感应的角速度和加速度的精确数字化, 常常以角度增量 $\Delta\tilde{\theta}_k$ 和速度增量 $\Delta\tilde{v}_{f,k}^b$ 作为输出, 上标 “~” 表示被误差干扰项。而低成本的惯导测量单元通常直接输出角速度 $\tilde{\omega}_{ib}^b$ 和比力 $\tilde{f}^b$ 。由于惯导算法一般采用双子样算法, 这些数据需要进行积分转化 (Shin, 2005)。

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\theta}_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \tilde{\omega}_{ib}^b dt \\ \Delta\tilde{v}_{f,k}^b &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \tilde{f}^b dt\end{aligned}\quad (2.15)$$

惯导精度主要受到惯性器件误差和滤波初值误差影响。初值误差一般由对准方式与器件自身精度决定。由于器件自身精度原因, 陀螺和加表的原始观测值主要受零偏、比例因子、交轴耦合和测量噪声等影响。定义如下运算操作,

$$\Xi(a, b) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_4 \\ b_5 & b_6 & a_3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

其中 $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$, $b = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6]^T$ 。

陀螺仪和加速度计输出误差模型为:

$$\begin{cases} \delta\omega_{ib}^b = b_g + \text{diag}(\omega_{ib}^b)\Xi(s_g, \gamma_g) + w_g \\ \delta f^b = b_a + \text{diag}(f^b)\Xi(s_a, \gamma_a) + w_a \end{cases} \quad (2.17)$$

其中, δf^b 、 $\delta\omega_{ib}^b$ 分别表示比力和角速度误差。下标 “g” 和 “a” 分别表示陀螺仪和加表, “b”、“s” 和 “ γ ” 分别表示零偏、比例因子和交轴耦合真值, 其中 $b = \hat{b} - \delta b$, $\hat{b}$ 利用式(2.19)校正, s 和 γ 同理。 w_g 和 w_a 分别为陀螺仪和加表测量噪声。“diag” 表示对角阵。交轴耦合如式(2.18)所示, 由于量级较小, 一般不进行估计和补偿。

$$\gamma = [\gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yx} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{zy}]^T \quad (2.18)$$

2) 误差校正

在导航解算时必须对惯性器件的输出值进行误差补偿。

$$\begin{aligned}\Delta\theta_k &= [I + \Xi(\hat{s}_g, \hat{\gamma}_g)]^{-1} [\Delta\tilde{\theta}_k - \hat{b}_g \Delta t_k] \\ \Delta v_{f,k}^b &= [I + \Xi(\hat{s}_a, \hat{\gamma}_a)]^{-1} [\Delta\tilde{v}_{f,k}^b - \hat{b}_a \Delta t_k]\end{aligned}\quad (2.19)$$

其中 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ 。“ $\hat{b}$ ”、“ $\hat{s}$ ” 和 “ $\hat{\gamma}$ ” 分别表示上一历元零偏、比例因子和交轴耦合的计算结果。

2.2.2 速度更新方程

对式(2.14)进行离散化并积分可得速度更新方程如下:

$$v_k^n = v_{k-1}^n + \Delta v_{f,k}^n + \Delta v_{g/cor, k}^n \quad (2.20)$$

本算法基于 n 系, $\Delta v_{g/cor, k}^n$ 是由重力和科里奥利力带来的速度增量, $\Delta v_{f, k}^n$ 是由比力带来的速度增量, v_{k-1}^n 表示前一历元的速度。

$$\Delta v_{f, k}^n = \frac{1}{2} \left[C_{n(k-1)}^{n(k)} + I \right] C_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta v_{f, k}^{b(k-1)} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{f, k}^{b(k-1)} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} C_{b(t)}^{b(k-1)} f^b dt \\ &\approx \Delta v_{f, k}^b + \frac{1}{2} \Delta \theta_k \times \Delta v_{f, k}^b + \frac{1}{12} (\Delta \theta_{k-1} \times \Delta v_{f, k}^b + \Delta v_{f, k-1}^b \times \Delta \theta_k) \end{aligned} \quad (2.22)$$

其中 $b(k)$ 、 $n(k)$ 分别表示 k 时刻的 b 系和 n 系, 其中第二项对应旋转效应补偿, 第三项对应划桨效应补偿。因为我们不能同时对角速度和线性加速度进行离散化, 因此需要在计算中补偿上述误差项。

将 $C_{n(k-1)}^{n(k)} = I - (\zeta_k \times)$ 代入式(2.21), 可以得到:

$$\Delta v_{f, k}^b = [I - (0.5\zeta_k \times)] C_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta v_{f, k}^{b(k-1)} \quad (2.23)$$

$$\zeta_k = [\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n]_{k-1/2} \Delta t_k \quad (2.24)$$

ζ_k 对应 n 系下 $k-1$ 时刻到 k 时刻的旋转矢量, $k-1/2$ 对应时间段 $[k-1, k]$ 中间时刻值, 需要计算对应 $k-1/2$ 时刻的速度和位置值, 然后计算 ω_{ie}^n 、 ω_{en}^n , 由于还未推算至 k 时刻, 因此外推 $k-1$ 时刻位置和速度至 k 时刻。 ω_{ie}^n 、 ω_{en}^n 可利用式(2.1)计算。

高度的外推可利用下式计算:

$$h_{k-1/2} = h_{k-1} - v_{D, k-1} \Delta t_k / 2 \quad (2.25)$$

纬度与经度可利用四元数外推:

$$q_{n(k-1/2)}^{e(k-1)} = q_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes q_{n(k-1/2)}^{n(k-1)} \quad (2.26)$$

$$q_{n(k-1/2)}^{e(k-1/2)} = q_{e(k-1)}^{e(k-1/2)} \otimes q_{n(k)}^{e(k-1)} \quad (2.27)$$

$$q_{n(k-1/2)}^{n(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\zeta_{k-1/2}\| \\ \frac{\sin \|0.5\zeta_{k-1/2}\|}{\|0.5\zeta_{k-1/2}\|} 0.5\zeta_{k-1/2} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$q_{e(k-1)}^{e(k-1/2)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\xi_{k-1/2}\| \\ -\frac{\sin \|0.5\xi_{k-1/2}\|}{\|0.5\xi_{k-1/2}\|} 0.5\xi_{k-1/2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

其中,

$$\zeta_{k-1/2} = \omega_{in}^n(t_{k-1}) \Delta t_k / 2 \quad (2.30)$$

$$\xi_{k-1/2} = \omega_{ie}^e \Delta t_k / 2$$

速度外推可利用下式得到:

$$v_{k-1/2}^n = v_{k-1}^n + \frac{1}{2} \Delta v_{k-1}^n \quad (2.31)$$

$$\Delta v_{k-1}^n = \Delta v_{f, k-1}^n + \Delta v_{g/cor, k-1}^n \quad (2.32)$$

其中 Δv_{k-1}^n 为上个历元计算并储存的值。

重力和科里奥利力引起的速度误差可用下式改正，

$$\Delta v_{g/cor,k}^n = \left[g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n \right]_{k-1/2} \Delta t_k \quad (2.33)$$

2.2.3 位置更新方程

用四元数法更新位置， q_n^e 表示惯导从 n 系到 e 系的转换四元数，可用式(2.13)计算，利用四元数的运算法则更新 q_n^e ，

$$q_{n(k)}^{e(k-1)} = q_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes q_{n(k)}^{n(k-1)} \quad (2.34)$$

$$q_{n(k)}^{e(k)} = q_{e(k-1)}^{e(k)} \otimes q_{n(k)}^{n(k-1)} \quad (2.35)$$

$$q_{n(k)}^{n(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\zeta_k\| \\ \frac{\sin \|0.5\zeta_k\|}{\|0.5\zeta_k\|} 0.5\zeta_k \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$q_{e(k-1)}^{e(k)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\xi_k\| \\ -\frac{\sin \|0.5\xi_k\|}{\|0.5\xi_k\|} 0.5\xi_k \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$\xi_k = \omega_{ie}^e \Delta t_k$ 表示 e 系从 $k-1$ 时刻至 k 时刻的旋转矢量， ζ_k 表示 n 系 k 时刻至 $k-1$ 时刻的旋转矢量。

k 时刻速度已更新，因此可通过内插得到 $k-1/2$ 时刻的速度，

$$v_{k-1/2}^n = \frac{1}{2}(v_{k-1}^n + v_k^n) \quad (2.38)$$

因此 ζ_k 可以利用更新的 $k-1/2$ 时刻的速度进行计算。

位置中的纬度和经度可以由四元数转换得到。高度可以用下式单独更新，

$$h_k = h_{k-1} - v_{D,k-1/2} \Delta t_k \quad (2.39)$$

2.2.4 姿态更新方程

姿态四元数可以用 q_b^n 表示，其更新算法表示如下：

$$q_{b(k)}^{n(k-1)} = q_{b(k-1)}^{n(k-1)} \otimes q_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (2.40)$$

$$q_{b(k)}^{n(k)} = q_{b(k-1)}^{n(k)} \otimes q_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (2.41)$$

$$q_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\phi_k\| \\ \frac{\sin \|0.5\phi_k\|}{\|0.5\phi_k\|} 0.5\phi_k \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

式中 ϕ_k 表示载体坐标系下的旋转矢量，

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega_{ib}^b + \frac{1}{2} \phi \times \omega_{ib}^b + \frac{1}{12} \phi \times (\phi \times \omega_{ib}^b) \\ &\approx \omega_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta \theta(t) \times \omega_{ib}^b \end{aligned} \quad (2.43)$$

其中 $\Delta \theta(t) = \int_{t_{k-1}}^t \omega_{ib}^b d\tau$ 。

因此,

$$\begin{aligned}\phi_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\omega_{ib}^b + \frac{1}{2} \phi \times \omega_{ib}^b \right] dt \\ &\approx \Delta\theta_k + \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k\end{aligned}\quad (2.44)$$

式中第二部分指二阶圆锥效应补偿项。

可用下式计算 n 系 $k-1$ 时刻至 k 时刻更新四元数,

$$q_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\zeta_k\| \\ -\frac{\sin\|0.5\zeta_k\|}{\|0.5\zeta_k\|} 0.5\zeta_k \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

上一部分已对 k 时刻位置进行更新, 可以通过内插 $k-1$ 时刻至 k 时刻位置获取 $k-1/2$ 时刻的位置, 可用内插出的 $k-1/2$ 时刻的位置和速度更新 n 系四元数。

内插 $k-1/2$ 时刻高度公式如下:

$$h_{k-1/2} = \frac{1}{2}(h_{k-1} + h_k) \quad (2.46)$$

可用下式计算从 $k-1$ 时刻至 k 时刻位置变化四元数,

$$q_{\delta\theta} = (q_{n(k-1)}^{e(k-1)})^{-1} \otimes q_{n(k)}^{e(k)} \quad (2.47)$$

可用下式内插 $k-1/2$ 时刻位置,

$$q_{n(k-1/2)}^{e(k-1/2)} = q_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes q_{0.5\delta\theta} \quad (2.48)$$

式中 $q_{0.5\delta\theta}$ 对应等效旋转矢量为 $0.5\delta\theta$ 的四元数。

计算 q_b^n 时, 由于数值误差, 其容易违反正交化的约束条件, 每次计算时需要进行正交化处理,

$$q_b^n = (1 - e_q) q_b^n \quad (2.49)$$

$$e_q = \frac{1}{2} \left[(q_b^n)^T q_b^n - 1 \right] \quad (2.50)$$

式中 e_q 表示四元数正交化误差。

2.3 惯性导航算法误差

为了得到高精度的导航结果, 我们需要建立对应的惯导误差方程, 对惯性导航系统中不同误差源进行分析。在对惯性导航算法中的误差进行分析时, 可以采取扰动分析的方法, 可将导航方程中的变量视为包含误差的观测值, 其由真值与扰动项组成。省略二阶以上的误差项, 将非线性系统展开为线性系统。

由于器件和重力的影响, 利用惯性导航算法计算的导航结果总存在导航误差。针对不同精度需求和应用场景, 已有一些关于惯性器件误差随时间传播特性的研究, 比较有代表性的包括基于计算系的 ψ 角误差模型、基于导航系的 ϕ 角误差模型

等, 相关文献表明这两种误差模型在原理上等价, 本质上 ψ 角误差模型来源于 ϕ 角误差模型(Benson, 1975)。 ϕ 角误差模型便于从推导过程中理解误差传播过程, ψ 角误差模型以 INS 位置估计值确定的参考坐标系(假设的导航系)进行推算, 模型简单, 包含变量更少, 便于建模(Shin, 2005), 因此本文惯导误差方程采用 ψ 角误差模型。

2.3.1 速度误差方程

ψ 角误差模型中, 速度、位置和姿态误差方程可以通过在计算系下进行扰动分析获取。速度微分方程在 c 系下可表示为:

$$\dot{\mathbf{v}}_{true}^c = \mathbf{f}_{true}^c - (2\omega_{ie}^c + \omega_{ec}^c) \times \mathbf{v}_{true}^c + \mathbf{g}_{true}^c \quad (2.51)$$

对速度和重力进行扰动误差分析, 可表示如下:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}^n &= \mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n = \mathbf{v}^c + \delta \mathbf{v}^c \\ \hat{\mathbf{g}}^n &= \mathbf{g}^n + \delta \mathbf{g}^n = \mathbf{g}^c + \delta \mathbf{g}^c \end{aligned} \quad (2.52)$$

其中, $\hat{\mathbf{v}}^n$ 为 n 系下惯导解算的速度, $\hat{\mathbf{g}}^n$ 为 n 系下惯导解算的重力加速度, $\delta \mathbf{v}^c$ 为 c 系下的速度误差, $\delta \mathbf{g}^c$ 为 c 系下的重力误差。在 c 系下进行误差分析时, 由于位置和 c 系对时间的导数可通过惯导解算得到, 所以 C_c^e 、 ω_{ie}^c 和 ω_{ic}^c 没有误差扰动。

此时平台系捷联惯导系统计算的速度微分方程表示为:

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}^n = \mathbf{f}_{true}^p + \delta \mathbf{f}^p - (2\omega_{ie}^c + \omega_{ec}^c) \times \hat{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{g}}^n \quad (2.53)$$

结合 $\mathbf{f}^p = C_c^p \mathbf{f}^c = [I - (\psi \times)] \mathbf{f}^c = \mathbf{f}^c + \mathbf{f}^c \times \psi$ 以及式(2.51)、式(2.52)和(2.53)可得如下关系式,

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^c = \mathbf{f}^c \times \psi - (2\omega_{ie}^c + \omega_{ec}^c) \times \delta \mathbf{v}^c + \delta \mathbf{g}^c + \delta \mathbf{f}^p \quad (2.54)$$

式中 $\delta \mathbf{g}^c$ 为计算系下的重力误差项, 计算公式如下所示,

$$\delta \mathbf{g}^c = \begin{bmatrix} \frac{-g \delta r_N}{R_M + h} & \frac{-g \delta r_E}{R_N + h} & \frac{2g \delta r_D}{R + h} \end{bmatrix}^T \quad (2.55)$$

其中 δr_N 、 δr_E 、 δr_D 对应计算系位置误差, $R = \sqrt{R_M R_N}$ 。

2.3.2 位置误差方程

t 时刻的地球系位置可以表示如下:

$$\mathbf{r}_{true}^e = \int_0^t C_c^e \mathbf{v}_{true}^c d\tau \quad (2.56)$$

其中 $\mathbf{v}_{true}^c$ 为计算系下的速度。

捷联惯导计算的实际位置为:

$$\hat{\mathbf{r}}^e = \int_0^t C_c^e \hat{\mathbf{v}}^n d\tau \quad (2.57)$$

式(2.57)与式(2.56)作差可获取地球系位置误差,

$$\delta r^e = \hat{r}^e - r^e = \int_0^t C_c^e \hat{v}^n d\tau - \int_0^t C_c^e v_{true}^c d\tau \quad (2.58)$$

由式(2.52)可推导出如下关系式,

$$\delta r^e = \int_0^t C_c^e \delta v^c d\tau \quad (2.59)$$

上式在计算系投影可得计算系位置误差,

$$\delta r^c = C_e^c \int_0^t C_c^e \delta v^c d\tau \quad (2.60)$$

对上式进行微分, 利用 DCM 的微分形式 $\dot{C}_e^c = C_e^c (\omega_{ce}^e \times)$, 由斜对称矩阵的变换性质 $\omega_{ce}^c = C_e^c (\omega_{ce}^e \times) C_e^c$, 可推导出如下关系式,

$$\delta \dot{r}^c = \dot{C}_e^c \int_0^t C_c^e \delta v^c d\tau + \delta v^c = -\omega_{ec}^c \times \delta r^c + \delta v^c \quad (2.61)$$

2.3.3 姿态误差方程

p 系的旋转角速度 ω_{ip}^p 和 c 系的旋转角速度 ω_{ic}^c 具有如下关系,

$$\omega_{ip}^p = \omega_{ic}^c - \varepsilon^p \quad (2.62)$$

$$\varepsilon^p = C_b^p \delta \omega_{ib}^b \quad (2.63)$$

由式(2.62)与式(2.9)可推导如下关系式,

$$\omega_{cp}^p = \omega_{ip}^p - \omega_{ic}^p = \omega_{ic}^c - \varepsilon^p - C_c^p \omega_{ic}^c = -\omega_{ic}^c \times \psi - C_b^p \delta \omega_{ib}^b \quad (2.64)$$

其中 ω_{cp}^p 表示平台系相对于计算系的旋转角速度在平台系的投影, 假设 ψ 对应小角度矢量, 则认为 $\omega_{cp}^p = \dot{\psi}$ 。则可得到 ψ 角误差模型下的姿态误差微分方程,

$$\dot{\psi} = -\omega_{ic}^c \times \psi - C_b^p \delta \omega_{ib}^b \quad (2.65)$$

ψ 角惯导速度、位置和姿态误差模型总结如下:

$$\begin{cases} \delta \dot{v}^c = f^c \times \psi - (2\omega_{ie}^c + \omega_{ec}^c) \times \delta v^c + \delta g^c + C_b^p \delta f^b \\ \delta \dot{r}^c = -\omega_{ec}^c \times \delta r^c + \delta v^c \\ \dot{\psi} = -(\omega_{ie}^c + \omega_{ec}^c) \times \psi - C_b^p \delta \omega_{ib}^b \end{cases} \quad (2.66)$$

2.4 本章小结

本章主要描述了捷联惯导系统中常用的坐标系及其转换关系和数学基本概念。阐述了捷联惯性导航算法, 并推导了 ψ 角误差模型, 为第三章 GNSS RTK/INS 紧组合算法设计打下了 INS 数据处理方面的理论基础。

3. 载波相位相对定位理论

3.1 载波相位相对定位原理

载波相位测量的原理为卫星发射载波信号，接收机需要在同一时刻测量载波在接收机和卫星处的相位，然后再计算这两者之间的相位差。完整的载波相位观测值由整周未知数（又称整周模糊度）、整周计数和不足一周的小数部分组成。接收机无法获取整周未知数，可以通过在线估计等方法求出。当接收机载波跟踪环路稳定跟踪信号而不失锁时，其对同一颗卫星信号进行的连续的载波相位观测值中都含有同一整周未知数。当载波跟踪环路对信号失锁后又重新锁定时，它输出的载波相位测量值中的整周计数通常会发生跳变，称为整周跳变，在进行数据处理时还需进行周跳探测和相应处理工作。

GNSS 定位中载波相位观测值的测量精度受到钟误差、星历误差、电离层延迟、对流层延迟、多路径效应和测量噪声等多种因素的影响，上述误差源在空间和时间上高度相关，其中钟误差、星历误差与卫星和测站相关，电离层延迟、对流层延迟与信号传播路径相关，除了多路径效应和测量噪声以外，通过构建双差观测值可以削弱或消除大部分测量误差。

对相同的多台接收机进行同步观测可以确定它们之间的空间位置关系，这种定位方式称为相对定位。在精密相对定位系统中，一般由基准站播发它的 GNSS 测量值，用户接收机将这些测量值与自身对卫星的测量值经差分运算组合起来，最后利用组合后的测量值求解出基线向量而完成相对定位。根据数据传播与定位解算的实时性，可将其分为实时和事后的载波相位相对定位。基于载波相位测量值的精密相对定位消去了大部分的空间相关性误差，因此其定位精度很高，可以达到厘米级水平，是 GNSS 定位中精度最高的定位方式之一。载波相位动态相对定位过程如图 3.1 所示，

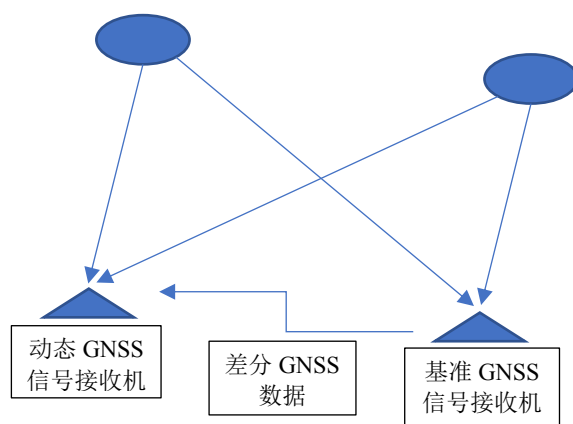


图 3.1 载波相位动态相对定位示意图

3.2 常用观测值及其线性组合

相对定位常用观测值包括伪距和载波相位。伪距观测值是将 GNSS 信号从发射时刻(卫星钟时间) t_u ，到接收时刻(接收机钟时间) t^s 之间的时间间隔，乘以光速获得的距离测量值。伪距观测值精度受到测距码影响，测距码主要分为粗码(捕获码，C/A 码)和精码(P 码)，粗码码长为 293 米，精码码长为 29.3 米，伪距观测值测量精度可以达到 1%测距码码长。通过比较卫星钟测距码和接收机复制测距码之间的相关性，接收机内部跟踪环路可以计算出 GNSS 信号从发射时刻至接收时刻的时延。时延中包含了星历误差、时钟误差、大气传播路径误差、多路径效应和测量噪声等误差的影响。载波相位观测值已在第一节中阐述。而组合观测值在原有解算精度基础上可能具有特殊的优良特性。

3.2.1 原始观测值

由载波相位相对定位与多普勒测速原理，可推导出如下 GNSS 原始伪距、载波相位和多普勒观测方程，

$$\begin{aligned}\rho &= r + c(\delta t_u - \delta t^s) + I + T + \varepsilon_\rho \\ \lambda\phi &= r + c(\delta t_u - \delta t^s) - I + T + \lambda N + \varepsilon_\phi\end{aligned}\quad (3.1)$$

其中，

u 、 s 分别表示接收机，卫星；

ρ 、 ϕ 分别表示伪距(m)、载波相位(cycle)观测值；

r 表示卫星和接收机之间的几何距离(m)；

δt_u 、 δt^s 分别表示接收机钟差和卫星钟差(s)；

c 表示光速(m/s)；

I 、 T 分别表示电离层延迟和对流层延迟(m)；

N 表示载波相位整周模糊度(cycle)；

ε_ρ 、 ε_ϕ 表示对应伪距(m)、载波相位(cycle)观测噪声、多路径等未建模的残余误差；

λ 表示载波波长(m)。

3.2.2 站间单差观测值

单差观测值为两个接收机在同一时刻对同一颗卫星的测量值的一次差分。用户接收机 r 和基准站接收机 b 同时跟踪卫星 k 。参照载波相位观测方程式(3.2)， t 时刻以波长为单位的接收机 r 与 b 对卫星 k 的载波相位测量值可分别表达如下：

$$\begin{aligned}\phi_r^k &= \lambda^{-1}[r_r^k - I_r^k + T_r^k] + f \cdot (\delta t_r - \delta t^k) + N_r^k + \varepsilon_r^k \\ \phi_b^k &= \lambda^{-1}[r_b^k - I_b^k + T_b^k] + f \cdot (\delta t_b - \delta t^k) + N_b^k + \varepsilon_b^k\end{aligned}\quad (3.2)$$

上述式子中等号右边除几何距离外，其余各项误差项可以通过差分被削弱或消除，不必求解出来。将单差载波相位测量值定义为用户接收机 r 和基准站接收机 b 对卫星 k 的的载波相位测量值之差，

$$\phi_{br}^k = \phi_r^k - \phi_b^k = \lambda^{-1}[r_{br}^k - I_{br}^k + T_{br}^k] + f \cdot \delta t_{br} + N_{br}^k + \varepsilon_{\phi,br}^k \quad (3.3)$$

类似的，可将伪距组合成单差伪距观测值，

$$\rho_{br}^k = \rho_r^k - \rho_b^k = [r_{br}^k + I_{br}^k + T_{br}^k] + f \cdot \delta t_{br} + \varepsilon_{\rho,br}^k \quad (3.4)$$

由单差观测值表达式可知，单差不但可以用于消除测量值中的卫星钟差，还可以削弱卫星轨道误差、对流层和电离层延迟等大气延时误差。在短基线情形下，可基本消除大气延时误差，获得高精度定位结果。但是单差测量噪声均方差增大到原载波相位测量噪声均方差的 $\sqrt{2}$ 倍。若我们要求基于载波相位测量值的相对定位的精度达到厘米级，那么单差载波相位测量值所含的误差也应该被控制在厘米级之内。若单差的测量误差超过半个波长（即约 10cm），那么随后对单差整周模糊度的求解很可能引入一个整个波长的误差。

3.2.3 站星双差观测值

双差观测值为两个接收机在同一时刻对两颗卫星的测量值先进行站间单差，再将单差观测值进行星间差分，即在站间和星间各求一次差分。假设用户接收机 r 和基准站接收机 b 同时跟踪卫星 j ，它们对卫星 j 的单差载波相位测量值为：

$$\phi_{br}^j = \lambda^{-1}[r_{br}^j - I_{br}^j + T_{br}^j] + f \cdot \delta t_{br} + N_{br}^j + \varepsilon_{\phi,br}^j \quad (3.5)$$

结合式(3.3)，由它们所组成的双差载波相位测量值为：

$$\phi_{br}^{jk} = \phi_{br}^k - \phi_{br}^j = \lambda^{-1}[r_{br}^{jk} - I_{br}^{jk} + T_{br}^{jk}] + N_{br}^{jk} + \varepsilon_{\phi,br}^{jk} \quad (3.6)$$

双差观测值之间存在数学相关性，假设某历元存在 n 个双差观测值，相关噪声矩阵表示如下：

$$D(t) = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \dots \\ 1 & n & 1 & \dots \\ 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

类似的，可将伪距单差观测值组合成双差观测值如下：

$$\rho_{br}^{jk} = \rho_{br}^k - \rho_{br}^j = [r_{br}^{jk} + I_{br}^{jk} + T_{br}^{jk}] + \varepsilon_{\rho,br}^{jk} \quad (3.8)$$

由式(3.6)可知，双差能彻底消除接收机钟差和卫星钟差，同时进一步削弱了电离层和对流层延迟的影响，但是双差测量值噪声均方差增加到原先单差测量噪声均方差的 $\sqrt{2}$ 倍，一般在 1cm 左右，大致为 0.05 个载波 L1 的波长。

双差重新定义了整周模糊度，双差整周模糊度为未知整数，其不再等同于原先单差测量中的整周模糊度。双差观测值消除了与时间和空间相关的大部分 GNSS 误差，是 GNSS 定位中的重要观测值。

下面推导双差观测方程。将方程(3.6)、(3.8)在移动站天线近似位置 (x_{r0}, y_{r0}, z_{r0}) 处进行泰勒级数展开, 舍弃高阶项, 可得线性化后的双差载波相位、伪距观测方程如下:

$$\begin{aligned} \phi_{br}^{jk} = & \phi_{br0}^{jk} + \lambda^{-1} \left[\left(\frac{\Delta x_{r0}^j}{r_{r0}^j} - \frac{\Delta x_{r0}^k}{r_{r0}^k} \right) dX_r + \left(\frac{\Delta y_{r0}^j}{r_{r0}^j} - \frac{\Delta y_{r0}^k}{r_{r0}^k} \right) dY_r + \right. \\ & \left. \left(\frac{\Delta z_{r0}^j}{r_{r0}^j} - \frac{\Delta z_{r0}^k}{r_{r0}^k} \right) dZ_r \right] + N_{br}^{jk} + \lambda^{-1} (T_{br}^{jk} - I_{br}^{jk}) + \varepsilon_{\phi, br}^{jk} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \rho_{br}^{jk} = & \rho_{br0}^{jk} + \left(\frac{\Delta x_{r0}^j}{r_{r0}^j} - \frac{\Delta x_{r0}^k}{r_{r0}^k} \right) dX_r + \left(\frac{\Delta y_{r0}^j}{r_{r0}^j} - \frac{\Delta y_{r0}^k}{r_{r0}^k} \right) dY_r + \\ & \left(\frac{\Delta z_{r0}^j}{r_{r0}^j} - \frac{\Delta z_{r0}^k}{r_{r0}^k} \right) dZ_r + T_{br}^{jk} + I_{br}^{jk} + \varepsilon_{\rho, br}^{jk} \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中,

$$\phi_{br0}^{jk} = \lambda^{-1} (r_{r0}^k - r_b^k - r_{r0}^j + r_b^j), \quad \rho_{br0}^{jk} = (r_{r0}^k - r_b^k - r_{r0}^j + r_b^j) \quad (3.11)$$

$$\Delta x_{r0}^j = x^j - x_{r0}, \quad \Delta y_{r0}^j = y^j - y_{r0}, \quad \Delta z_{r0}^j = z^j - z_{r0} \quad (3.12)$$

$$\Delta x_{r0}^k = x^k - x_{r0}, \quad \Delta y_{r0}^k = y^k - y_{r0}, \quad \Delta z_{r0}^k = z^k - z_{r0}$$

$$r_{r0}^j = \sqrt{(x^j - x_{r0})^2 + (y^j - y_{r0})^2 + (z^j - z_{r0})^2} \quad (3.13)$$

$$r_{r0}^k = \sqrt{(x^k - x_{r0})^2 + (y^k - y_{r0})^2 + (z^k - z_{r0})^2}$$

$$dX_r = x_r - x_{r0}, \quad dY_r = y_r - y_{r0}, \quad dZ_r = z_r - z_{r0} \quad (3.14)$$

设某历元可得到 n 个双差观测值, 为便于后续建立组合导航观测方程, 将线性化后的方程表示为矩阵形式,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda \nabla \Delta \hat{\phi} - \nabla \Delta r_0 \\ \nabla \Delta \hat{\rho} - \nabla \Delta r_0 \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} H_b & \lambda I_{n \times n} \\ H_b & 0 \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \delta X \\ \nabla \Delta N \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} v_\phi \\ v_\rho \end{bmatrix}}_v \quad (3.15)$$

式中 $\nabla \Delta$ 表示双差算子, $\nabla \Delta \hat{\phi}$ 、 $\nabla \Delta \hat{\rho}$ 指改正电离层和对流层误差后的双差载波相位观测值、双差伪距观测值, $\nabla \Delta r_0$ 指利用近似位置计算的站间、星间双差几何距离, H_b 指与基线向量对应的设计矩阵, δX 指基线向量的增量, $\nabla \Delta N$ 为载波相位双差模糊度, v_ρ 、 v_ϕ 分别为伪距和载波的误差量。

3.2.4 线性组合观测值

单差和双差观测值属于同频率同类型观测值之间的线性组合, 其可通过求差来消除卫星钟差、接收机钟差、整周模糊度等参数。此外 GNSS 定位中经常使用同类型不同频率以及不同类型的组合观测值作为虚拟观测值, 这类组合观测值在原有解算精度基础上可能具有一些优于原始观测值的特性。如窄巷组合噪声水平较低, 宽巷组合波长较长, 无电离层组合可以减弱电离层折射延迟影响, 电离层残差组合常常用于探测周跳等。

1. 一般形式

ϕ_1 、 ϕ_2 分别表示 L_1 、 L_2 载波相位观测值的相位，以周计数，则线性组合相位观测值(cycle)、波长、频率、模糊度和相位观测值(m)通用形式可用式(3.16)表示，其中 n 、 m 表示组合系数。

$$\begin{cases} \phi_{n,m} = n\phi_1 + m\phi_2 \\ \lambda_{n,m} = c / (nf_1 + mf_2) \\ f_{n,m} = nf_1 + mf_2 \\ N_{n,m} = nN_1 + mN_2 \\ L_{n,m} = \lambda_{n,m}\phi_{n,m} = (nf_1L_1 + mf_2L_2) / (nf_1 + mf_2) \end{cases} \quad (3.16)$$

上式表明线性组合观测值仅改变了频率相关误差项。

2. 窄巷载波相位测量值(Narrow-Lane)

窄巷组合测量值由两个载波相位观测值之和组成，相位观测值(cycle)、频率和波长表达式如下：

$$\begin{cases} \phi_{NL} = \phi_1 + \phi_2 \\ f_{NL} = f_1 + f_2 = 2803.02\text{MHz} \\ \lambda_{NL} = c / f_{NL} = 10.7\text{cm} \end{cases} \quad (3.17)$$

其较短的波长不利于求解整周模糊度。假定 ϕ_1 与 ϕ_2 之间的测量误差不相关，并且它们以周为单位的误差均方差 σ_{ϕ_1} 与 σ_{ϕ_2} 相等，则双差窄巷载波观测值 ϕ_{NL} 的误差均方差 $\sigma_{\phi_{NL}}$ 可以表示如下：

$$\sigma_{\phi_{NL}} = \sqrt{2} \frac{f_1}{f_{NL}} \sigma_{\phi_1} = 0.795 \sigma_{\phi_1} \quad (3.18)$$

双差窄巷载波相位观测值以米为单位的误差均方差比 L_1 （和 L_2 ）双差载波相位观测值要小，因此它可应用于精密定位。

3. 宽巷载波相位测量值(Wide-Lane)

宽巷组合测量值由两个载波相位观测值之差组成，相位观测值(cycle)、频率和波长表达式如下：

$$\begin{cases} \phi_{WL} = \phi_1 - \phi_2 \\ f_{WL} = f_1 - f_2 = 347.82\text{MHz} \\ \lambda_{WL} = c / f_{WL} = 86.19\text{cm} \end{cases} \quad (3.19)$$

其较长的波长使得很容易确定其对应的整周模糊度。若关于测量噪声大小的假设与前面相同，则双差宽巷载波相位观测值 ϕ_{WL} 的误差均方差 $\sigma_{\phi_{WL}}$ 为：

$$\sigma_{\phi_{WL}} = \sqrt{2} \frac{f_1}{f_{WL}} \sigma_{\phi_1} = 6.41 \sigma_{\phi_1} \quad (3.20)$$

由上式可知虽然宽巷化使得观测值波长变长，使整周模糊度的求解变得相对容易，但它放大了测量噪声。双差宽巷载波相位测量值中以米为单位的误差均方差增大到 L_1 （和 L_2 ）双差载波相位观测值的 6.41 倍，因此直接利用双差宽巷载波相位测量值而解得的相对定位的精度一般不会很高。

4. MW 载波相位测量值(Melbourne-Wubben)

MW 载波相位测量值通过相位宽带组合减去伪距窄带组合得到:

$$\phi_{WL} \cdot \lambda_{WL} - \frac{f_1 P_1 + f_2 P_2}{f_1 + f_2} + N_{WL} \cdot \lambda_{WL} = 0 \quad (3.21)$$

此组合消除了接收机和卫星钟差、电离层和对流层延迟和几何距离, 仅受到测量噪声和多路径误差的影响, 可通过多历元的观测来平滑、削弱, 在存在轨道误差、站坐标误差和大气延迟误差的情况下, 仍可正确确定宽巷模糊度 $N_{WL} = N_1 - N_2$, 由于式子中只留下模糊度参数 N_1 和 N_2 , 周跳结果会使得宽巷模糊度 N_{WL} 发生变化, 也用于周跳探测与修复。

5. 几何无关组合载波相位测量值(Geometry-free)

几何无关组合(Goad, 1986), 也称为电离层残差组合, 表达式如下:

$$\phi_{GF} = \phi_1 - \frac{f_1}{f_2} \phi_2 \quad (3.22)$$

几何无关组合消除了卫星和接收机钟差、几何距离影响, 削弱了电离层延迟, 将上式在历元间求差可用于探测周跳。其波长无限大, 不存在模糊度问题。

6. 无电离层组合载波相位测量值(Ionosphere-free)

无电离层组合测量值可以消除低阶电离层影响, 如下式所示,

$$\phi_{IF} = \phi_1 - \frac{f_2}{f_1} \phi_2 \quad (3.23)$$

无电离层组合消去了电离层的低阶影响, 适用于短基线, 长基线时需要顾及电离层高阶项影响。

3.3 随机模型

随机模型体现了系统状态变化、观测值的精度和待估量的随机特性等。这里主要给出有关观测值的随机模型, 构建合理的观测噪声的方差协方差矩阵。

建立随机模型的常用方法主要分为三类, 等权法、基于卫星信息的方法(包括仰角函数法和信噪比法等)及基于验后残差的估计方法(包括 Helmert 方差分量估计、最小范数二次无偏估计、最优不变二次无偏估计等)。其中仰角函数法原理直观, 实现简便, 较为适合工程化应用。一般 GNSS 误差与空间相关, 高度角低的卫星受到的大气传播延时误差、多路径误差大于高度角高的卫星。仰角函数法利用这一规律对观测噪声按照高度角进行定权。

当高度角为 Ele , 测站 b 观测到卫星 k 的观测值方差表示如下:

$$(\sigma_b^k)^2(Ele) = \begin{cases} \sigma^2 / \sin^2(Ele), & Ele < 30^\circ \\ \sigma^2, & Ele \geq 30^\circ \end{cases} \quad (3.24)$$

式中 σ^2 一般取经验值，载波相位观测值对应 0.002m。考虑同类型同频率观测值的相关性，双差观测值之间也存在相关性，观测值方差协方差矩阵可表示为：

$$D_s = \begin{bmatrix} \sum_{br}^{j1} \sigma_s^2 & \sum_{br}^j \sigma_s^2 & \cdots & \sum_{br}^j \sigma_s^2 \\ \sum_{br}^j \sigma_s^2 & \sum_{br}^{j2} \sigma_s^2 & \cdots & \sum_{br}^j \sigma_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{br}^j \sigma_s^2 & \sum_{br}^j \sigma_s^2 & \cdots & \sum_{br}^{jn} \sigma_s^2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

式中下标 s 表示观测值是伪距或载波相位。

$$\sum_{br}^j \sigma_s^2 = (\sigma_b^j)^2 + (\sigma_r^j)^2 \quad (3.26)$$

$$\sum_{br}^{jk} \sigma_s^2 = (\sigma_b^j)^2 + (\sigma_r^j)^2 + (\sigma_b^k)^2 + (\sigma_r^k)^2 \quad k=1 \cdots n \quad (3.27)$$

式(3.26)对应单差观测值方差，其相互之间独立。式(3.27)对应双差观测值方差，由于共视卫星引起了相关性。

3.4 载波相位相对定位误差来源

对于载波相位双差观测值，其中卫星和接收机钟差可以消除，电离层和对流层误差、卫星星历误差还存在残余误差，这部分误差与基线长度，基站与流动站高程差异有关系。短基线情况下，主要的误差源为多路径误差和测量噪声。中长基线情况下，需要对双差残余误差建模在线估计。

1. 卫星星历误差

GPS 广播星历的精度为 2m 左右。对于短基线的情况，星历误差对载波相位相对定位影响可省略，对于中长基线，需要采取其他方法消除。

2. 电离层延迟误差

电离层延迟的大小一般为几米左右，但当太阳黑子活动增强时，电离层中的电子密度会升高，这使得电离层延迟也随之增加，其值可达十几米，甚至几十米(谢刚, 2009)。相对定位时，短基线情况下，双差可以有效削弱电离层影响，中长基线情况下，可通过构建实测模型、在线估计电离层延迟参数或利用无电离层组合观测值消除低阶电离层影响的方式处理电离层延迟影响。

3. 对流层延迟误差

相对定位时，对于短基线，利用双差观测方程可以有效削弱对流层延迟影响，对于长基线，一般可利用模型计算对流层干分量，将湿分量作为参数进行在线估计。

4. 多路径效应

对于动态接收机来说,多路径误差值的大小具有随机性。由多路径引起的伪距误差一般为 1~5m,载波相位误差为 1~5cm。由于多路径误差值很难被预测、估计,所以一般在估计时作为残余误差项。

5. 接收机测量误差

一般来说,接收机噪声所引起的伪距测量误差在 1m 之内,而载波相位测量误差约为几个毫米。和多路径误差一样一般作为残余误差项。

3.5 周跳探测与处理

3.5.1 周跳探测方法

卫星在空间的运行轨迹一般是平滑的、连续的,因此卫星至接收机的距离观测值(载波相位观测值)的变化一般是平缓有规律的。在信号遮挡、信号受到外界干扰或接收机所处动态条件恶劣时,在两个观测历元间的某段时间多普勒计数器有时会停止正常的累计工作,使得整周计数较准确值少了整数周,当计数器恢复正常工作后,后续所有载波相位观测值中的整周计数便会含有相同周跳误差。周跳会影响载波相位观测值的规律性特征,使得观测值出现系统性的偏差。周跳的探测与修复本质上就是从载波相位观测值的时间序列中提取系统性粗差特征并改正。

周跳探测修复按照原理可分为三类方法(李征航和张小红, 2009),第一类是基于观测值随时间变化规律的方法,主要包括多项式拟合法和高次差法;第二类是基于观测值估计残差的方法,主要包括已知基线法;第三类是基于观测值组合的方法,包括伪距相位组合法(Han, 1997)、双频载波相位电离层残差法(何海波, 2002)、多普勒积分法(Xu, 2007)、相位差分法、TurboEdit 法(Blewitt, 1990)、TECR 法(Liu, 2011)、用星间单差观测值探测、用双频 P 码伪距及载波观测值探测和三次差法(袁洪和万卫星, 1998)等。此外三频观测值也可组成许多线性组合观测值。

下面对其中几种常用方法进行介绍。这些方法需要钟差、大气延迟等误差对观测值影响小于 1 周水平时才能探测修复 1 周周跳。

1. 多项式拟合法

这种方法本质上与高次差法一致,其通过多个无整周跳变的载波相位观测值利用最小二乘求得载波相位拟合多项式中的系数,并根据拟合后的残差计算中误差,然后用载波相位多项式外推值与实际观测值进行比较。方法适合于计算机实现,故被广泛使用。

2. 已知基线法

双差观测值中的双差站星几何距离可利用卫星坐标和已知基线计算出来,因而可利用该式逐历元计算出双差模糊度参数,根据该模糊度参数的变化来判定是否存在周跳。已知基线法适合于短基线单、双频差分观测值的周跳探测。

3. 双频载波相位电离层残差法

对几何无关组合观测值(3.22)前后历元求差构造如下观测值,

$$\lambda_i \Delta_t \phi_i - \lambda_j \Delta_t \phi_j = \lambda_i \Delta_t N_i - \lambda_j \Delta_t N_j - \Delta_t \Delta \delta_{iono} + \Delta_t \Delta \varepsilon_\phi, i \neq j \quad (3.28)$$

频率 i 和 j 的两个相位观测值的周跳可以被探测出来。 $\Delta_t \Delta \delta_{iono}$ 被称为电离层残差。一般短时间内电离层残差变化较小。因此电离层残差发生任何大的变化即说明发生了整周跳变。但是存在发生两个周跳 $\Delta_t N_i$ 和 $\Delta_t N_j$ 同时发生并导致 $\lambda_i \Delta_t N_i - \lambda_j \Delta_t N_j$ 的值很小的这种特殊情况(Hofmann-Wellenhof et al., 2007)。这说明在使用这种方法时, 大的电离层残差可表明周跳的存在, 小的电离层残差并不能确保周跳不存在。此外这种方法不能确定周跳产生的频率。

3.5.2 周跳修复处理

当周跳被探测出来后, 有两种方式对其进行处理。第一种是对发生周跳的载波相位观测值进行补偿修复, 第二种是在 GPS 观测方程中设置参数用于估计新的模糊度。在对周跳进行修复时, 不正确的修复会影响后续所有观测值。周跳发生后设置新的未知模糊度参数进行估计有利于估计结果的稳定性。重新估计模糊度的方法使得观测方程有更多的未知数。但原来的模糊度参数 $N(1)$ 和新的模糊度参数 $N(2)$ 之间存在如下关系式,

$$N(1, u, s, j) = N(2, u, s, j) + I(u, s, j) \quad (3.29)$$

式中, I 为积分常数; u 、 s 和 k 分别表示接收机、卫星和观测频率。对 $N(1)$ 和 $N(2)$ 进行计算, 积分常数可以很容易地被识别。若 $I = 0$, 则表明没有周跳发生。

3.6 整周模糊度解算

利用载波相位观测值获取厘米级至毫米级高精度定位的关键在于模糊度的正确解算。整周模糊度解算主要分为以下步骤, 首先计算模糊度浮点解, 可采用最小二乘或卡尔曼滤波方法估计模糊度浮点解及对应精度信息, 然后利用搜索算法将模糊度浮点解固定为模糊度整数解, 最后确认整周模糊度, 即判断搜索到的模糊度的正确性。模糊度解算的精度与可靠性取决于函数模型、观测值精度及冗余性和模糊度估计方法。

按照精密相对定位应用场景的不同, 整周模糊度解算方法主要分为两类, 一类为长时间静止的静态定位, 另一类为包括实时载波相位相对定位在内的非静态定位。按照所利用测量值的时间长短来分, 整周模糊度求解算法可分为单历元(也称快速)和多历元两类。单历元整周模糊度求解算法只利用一个测量时刻的测量值求解出整周模糊度, 但是在多路径、大气时延等误差的影响下, 这类算法容易收敛至局部最优值使得它获得正确解的成功率不高; 相反, 多历元整周模糊度求解算法则观察、利用一长段时间内的多个测量值, 这使得它收敛于全局最优值的成功率较高。

3.6.1 模糊度浮点解估计

模糊度浮点解估计表示将模糊度作为实数和其他导航参数一起估计，进而可以得到模糊度的浮点解及其方差协方差矩阵。常用的估计方法有最小二乘法和卡尔曼滤波方法。最小二乘法在静态定位中比较适用，动态定位中常常出现观测值减少的情况，因此使用卡尔曼滤波。

由于 RTK 在计算时涉及参考星的变换，因此将卡尔曼滤波得到的站间单差载波相位模糊度作为扩维状态量进行在线估计，在估计模糊度时需要将单差模糊度转换为双差模糊度进行计算。

$$\hat{\mathbf{x}}'_k = G\hat{\mathbf{x}}_k(+) = (\hat{\mathbf{x}}_{INS}^T, \hat{\mathbf{N}}^T)^T \quad (3.30)$$

$$\mathbf{P}'_k = G\mathbf{P}_k(+)G^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{INS}} & \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{INS}, \hat{\mathbf{N}}} \\ \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{x}}_{INS}} & \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{N}}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{21 \times 21} & & & & \\ & \mathbf{D} & & & \\ & & \mathbf{D} & & \\ & & & \mathbf{D} & \\ & & & & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{n \times (n-1)} \quad (3.32)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}'_k$ 、 $\mathbf{P}'_k$ 分别表示转换后的状态量及状态方差协方差， $\mathbf{G}$ 表示转换矩阵， n 表示双差观测值数， $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$ 、 $\mathbf{P}_k(+)$ 分别表示更新后的状态量及状态方差协方差， $\hat{\mathbf{x}}_{INS}$ 表示与惯导相关的误差状态量， $\hat{\mathbf{N}}$ 表示转换后得到的双差模糊度。 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{INS}}$ 、 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{INS}, \hat{\mathbf{N}}}$ 、 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{x}}_{INS}}$ 和 $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{N}}}$ 表示对应维度的状态方差。

3.6.2 模糊度搜索

模糊度搜索是从搜索空间内的备选模糊度组合中，搜索模糊度固定解的过程。搜索空间取决于搜索变量估值及其协方差矩阵，其中心位置由搜索变量估值所确定，其大小和形状则由搜索变量对应协方差矩阵所确定。搜索空间过大会延长搜索时间，搜索空间过小会遗漏正确的模糊度。模糊度搜索速度与模糊度空间、搜索方法有关。模糊度搜索成功率和可靠性与搜索方法、确认方法有关。按照搜索域的不同可以分为三类，包括观测值域，坐标域和模糊度域的搜索技术。

在观测值域内，模糊度搜索典型算法为双频码相组合法(Hatch, 1983)，这种方法较为简单，但是由于伪距精度较低，通常需要多个历元的平滑处理才能得到正确的模糊度。

在坐标域内，具有代表性的模糊度搜索算法为模糊度函数法(AFM)(Counselman and Gourevitch, 1981)，由于该方法计算效率较低而未被采用。

在模糊度域内，基于求解整数型最小二乘问题的整周模糊度求解算法一般是将某个目标函数最小化，目前应用较多的是使模糊度残差平方和最小。由于整数型最小二乘问题不存在解析解，因而整周模糊度求解算法一般是依据某种准则通过

搜索的方式来确定模糊度的，而在那些基于模糊度残差平方和最小原则的整数型最小二乘估算法中，具有代表性的方法包括模糊度最小二乘搜索法(LSAST)(Hatch, 1991)、模糊度快速解算法(FARA)(Frei, 1991)、最小二乘降相关法(LAMBDA)(Teunissen, 1995) 和模糊度快速搜索滤波(FASF) (Chen and Lachapelle, 1995; Chen, 1997)。LSAST 方法搜索速度和精度易受到四颗基本卫星相对几何位置的影响，对观测噪声较为敏感。LAMBDA 方法在搜索时间上相较于 FASF 方法更为稳定，LAMBDA 方法和 FASF 方法对模糊度参数的相关性的利用要优于 FARA 方法中采用的相关性利用的方法。前者根据条件参数的方差划定搜索范围要小于后者划定的搜索范围(李淑慧, 2003)。LAMBDA 方法降低了模糊度之间的相关性，计算性能好，被广泛应用，本文采用该方法进行模糊度搜索。

3.6.3 模糊度确认

搜索获取最优模糊度整数向量后，需要利用统计检验方法对模糊度固定正确与否进行确认。错误的模糊度将导致后续结果分米级甚至更大的定位偏差。模糊度成功率是评价模糊度整数解是否正确的有效指标。模糊度的成功率与模糊度浮点解的统计分布、方差协方差阵和归整域有关(王贵文, 2007)。

模糊度确认准则主要分为比值检验和差值检验。目前常用的确认方法是 Ratio 检验，其利用模糊度及其协方差驱动，通过比值进行检验。Ratio 检验包括 F-ratio 检验与 W-ratio 检验，前者较为常用。F-ratio 检验法原理为检验次优二次方差 σ_{sec}^2 和最优二次方差 σ_{min}^2 的比值(Li C C C et al, 1989)。

$$R = \frac{\sigma_{\text{sec}}^2}{\sigma_{\text{min}}^2} > R_{\text{thres}} \quad (3.33)$$

$$\sigma_i^2 = (\hat{N} - \tilde{N})^T P_{\tilde{N}}^{-1} (\hat{N} - \tilde{N}) \quad (3.34)$$

式中， $\hat{N}$ 为模糊度浮点解， $\tilde{N}$ 、 $\tilde{N}_2$ 分别为最优和次优整数模糊度组，解算方程见式(3.34)， $P_{\tilde{N}}$ 为模糊度协方差矩阵。 R 是检验指标， R_{thres} 表示判断固定模糊度的阈值(可设为 2.0 或 3.0)。

实际中一般结合 Ratio 检验和成功率指标以提高模糊度固定的正确性与可靠性。对于直接取整、整数序贯取整和整数最小二乘等整数估计方法，成功率可以用式(3.37)表示(Teunissen, 2000)，

存在多种方法可以通过模糊度估计向量得到整数向量，这些方式属于映射 $F: R^n \mapsto Z^n$ ，表示不同的模糊度估计向量将映射至相同的整数向量。可以分配子集 $S_z \subset R^n$ ，对于任一整数向量 $z \in Z^n$ ，存在如下关系，

$$S_z = \{x \in R^n | z = F(x)\} \quad (3.35)$$

子集包含了所有模糊度估计向量，其可通过 F 映射至相同整数向量。

$$\tilde{a} = z \Leftrightarrow \tilde{a} \in S_z \quad (3.36)$$

令 $P(\tilde{a} = a) = P(\tilde{a} \in S_z)$ ，则可计算通过估计值得到整数值的成功率 P_s 如下：

$$P_s = P(\tilde{a} = z) = \int_{S_z} p_{\tilde{a}}(x) dx, \forall z \in Z^n \quad (3.37)$$

其中， $p_{\tilde{a}}(x)$ 为浮点模糊度的概率密度函数，近似认为服从高斯分布， S_z 为模糊度为估计值 $\tilde{a}$ 的归整域。成功率反映了固定模糊度的正确概率，实际中若计算的成功率大于设定的阈值(如 0.99)，则认为通过成功率指标。

经过上述三个步骤，可以得到模糊度最优整数解 $\tilde{N}$ 。在卡尔曼滤波中，可以计算导航状态量的固定解 $\tilde{x}_{INS}$ 及对应方差 $P_{\hat{x}_{INS}}$ ，公式如下所示，

$$\tilde{x}_{INS} = \hat{x}_{INS} - P_{\hat{x}_{INS}, \hat{N}} P_{\hat{N}}^{-1} (\hat{N} - \tilde{N}) \quad (3.38)$$

$$P_{\hat{x}_{INS}} = P_{\hat{x}_{INS}} - P_{\hat{x}_{INS}} P_{\hat{N}}^{-1} P_{\hat{N}, \hat{x}_{INS}} \quad (3.39)$$

3.7 本章小结

本章主要描述了载波相位相对定位的相关理论，包括载波相位相对定位原理、常用观测值及其线性组合、观测值的随机模型、定位误差来源、常用的周跳探测与处理方法和整周模糊度解算流程等，为下一章 GNSS RTK/INS 紧组合算法设计打下了 GNSS 数据处理方面的理论基础。

4. RTK/INS 紧组合算法原理及软件设计

4.1 卡尔曼滤波原理

组合导航系统中需要选取合适的滤波融合算法以充分利用各导航系统的观测信息，获得导航的最优解。GNSS/INS 组合导航一般使用卡尔曼滤波方法进行最优估计(秦永元等, 2015)。卡尔曼滤波是导航系统中大多数状态估计算法的基础，可用于卫星导航结果的平滑、GNSS 信号的监测、惯性导航系统的对准和标定、惯性导航系统与卫星或其他导航传感器间的组合导航等，并已成为能够为导航系统从各种测量数据中获得最优结果的关键技术。卡尔曼滤波估计原理上属于一种贝叶斯估计，是基于最小方差的估计方法。在提供初始估计基础上，卡尔曼滤波通过递归运算，用先验值和最新观测值中得到数据的加权平均来更新状态估计。计算过程是先利用先验值进行预测，再用先验值计算出的权重对观测值进行加权后，去修正预测值。其优点是同时利用了系统参数的确定性特性和统计特性等先验信息以及观测值来获得最优估计，算法效率较高。

离散系统函数模型表示为：

$$\begin{cases} X_k = \Phi_{k/k-1} X_{k-1} + \Gamma_{k-1} W_{k-1} \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases} \quad (4.1)$$

式中， X_k 、 X_{k-1} 分别是 k 和 $k-1$ 时刻的状态向量， $\Phi_{k/k-1}$ 是离散后的状态转移阵， Γ_{k-1} 是噪声输入映射阵， W_{k-1} 是状态噪声向量， Z_k 是 k 时刻的观测向量， H_k 为设计阵， V_k 是观测噪声。

随机模型为：

$$\begin{cases} E[W_k W_j^T] = Q_k \delta(k-j), k \neq j \\ E[W_k] = 0 \\ E[V_k V_j^T] = R_k \delta(k-j), k \neq j \\ E[V_k] = 0 \\ E[W_k V_k] = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

标准的卡尔曼滤波流程主要分为预测和更新两个步骤。

预测，

$$\begin{cases} \hat{X}_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} \\ P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \end{cases} \quad (4.3)$$

更新，

$$\begin{cases} U_k = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k \\ K_k = P_{k,k-1} H_k^T U_k^{-1} \\ \hat{X}_k = \hat{X}_{k,k-1} + K_k (Z_k - H_k \hat{X}_{k,k-1}) \\ P_k = (I - K_k H_k) P_{k,k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \end{cases} \quad (4.4)$$

式中 $\hat{X}_{k,k-1}$ 为当前状态一步预测值, $P_{k,k-1}$ 为一步预测误差协方差矩阵, K_k 表示滤波增益, $\hat{X}_k$ 为当前状态估计值, P_k 为当前状态方差协方差。

4.2 RTK 组合导航算法原理

4.2.1 系统状态方程

卡尔曼滤波器在设计时需要选取合理的系统状态量, 直接将导航参数作为状态量估计会造成滤波方程的非线性问题, 在实际解算时容易引起滤波发散。因此本文采用状态误差的滤波模型。紧组合算法中, 系统状态量包括三维位置误差 δr^c , 三维速度误差 δv^c 和三维姿态误差 ψ 。INS 精度主要受到惯导器件误差的影响, 为了实现 IMU 误差的在线标定与补偿, 增加 IMU 误差作为增广状态量进行在线估计。一般将 IMU 中陀螺仪与加表的零偏和比例因子误差建模为一阶高斯马尔科夫过程(Park, 2004; Naser El-Sheimy, 2008), 如式(4.5)所示,

$$\begin{cases} \delta \dot{b}_g = -1/\tau_{bg} \delta b_g + w_{bg} \\ \delta \dot{b}_a = -1/\tau_{ba} \delta b_a + w_{ba} \\ \delta \dot{s}_g = -1/\tau_{sg} \delta s_g + w_{sg} \\ \delta \dot{s}_a = -1/\tau_{sa} \delta s_a + w_{sa} \end{cases} \quad (4.5)$$

其中 δb_g 、 δb_a 、 δs_g 和 δs_a 分别表示陀螺仪与加表的三维零偏和比例因子误差, τ_{bg} 、 τ_{ba} 、 τ_{sg} 和 τ_{sa} 为相关时间, w_{bg} 、 w_{ba} 、 w_{sg} 和 w_{sa} 为驱动噪声。

此外, 陀螺仪和加表的测量噪声一般积分处理为角度随机游走噪声 (Angle Random Walk, ARW) 和速度随机游走噪声 (Velocity Random Walk, VRW), 一般其通过系统噪声方差阵 Q 影响状态估计方差, 里程计比例因子一般建模为驱动噪声较小的随机游走或随机常数, 如式(4.6)所示。

$$\delta \dot{s}_{odo} = \eta_{odo} \quad (4.6)$$

式中 η_{odo} 为里程计比例因子驱动白噪声。

由此构成了 22 维的误差状态方程,

$$\dot{x}_{INS} = F x_{INS} + G w \quad (4.7)$$

式中 F 是系统动力学矩阵, G 是噪声输入映射矩阵, w 为驱动噪声向量(Shin, 2005)。 x_{INS} 是与导航参数、惯导和里程计相关的误差状态向量,

$$x_{INS} = [\delta r^c \quad \delta v^c \quad \psi \quad \delta b_g \quad \delta b_a \quad \delta s_g \quad \delta s_a \quad \delta s_{odo}]^T \quad (4.8)$$

由于 RTK 在计算时涉及参考星的变换, 因此将站间单差载波相位模糊度作为

增广状态量, 在进行模糊度固定时再将单差模糊度转换为双差模糊度进行计算。完整的状态向量表示如下:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x_{INS}^T & \Delta N_i^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \delta r^c & \delta v^c & \psi & \delta b_g & \delta b_a & \delta s_g & \delta s_a & \delta s_{odo} & \Delta N_1 & \Delta N_2 & \Delta N_5 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 $\Delta N_i = (\Delta N_{rb,i}^1, \Delta N_{rb,i}^2, \dots, \Delta N_{rb,i}^m)$ 为 L_i 信号站间单差载波相位偏差 (周)。

4.2.2 系统观测方程

4.2.2.1 伪距和载波相位观测方程

GNSS RTK/INS 紧组合卡尔曼滤波利用接收机输出的伪距和载波相位观测值, 分别在站间和星间作差构建双差伪距和双差载波相位观测值, 同时与惯导推算的双差几何距离作差, 作为卡尔曼滤波的观测值。双差伪距和载波相位观测方程可以表示如下:

$$\begin{aligned} P_{rb,i}^{jk} &= \rho_{br}^{jk} = (\rho_r^j - \rho_b^j) - (\rho_r^k - \rho_b^k) = r_{br}^{jk} + I_{br}^{jk} + T_{br}^{jk} + \varepsilon_{\rho,br}^{jk} \\ \Phi_{rb,i}^{jk} &= \varphi_{br}^{jk} \cdot \lambda_i = [(\varphi_r^j - \varphi_b^j) - (\varphi_r^k - \varphi_b^k)] \cdot \lambda_i = r_{br}^{jk} - I_{br}^{jk} + T_{br}^{jk} + \lambda_i N_{br}^{jk} + \varepsilon_{\varphi,br}^{jk} \end{aligned} \quad (4.10)$$

式中 b 、 r 分别指基准站和流动站, j 、 k 分别指参考卫星与观测卫星, 下标组合指站间作差, 上标组合指星间作差, φ 指载波相位观测值, ρ 指伪距观测值, r 指站星几何距离, λ_i 指载波波长, i 指不同载波类型, N 为载波相位整周模糊度, ε 为观测噪声及残余误差。

由惯导推算的 GNSS 天线到第 j 颗 GNSS 卫星 s_j 的伪距表示如下:

$$\hat{\rho}_r^j = \sqrt{(x_I - x_{s_j})^2 + (y_I - y_{s_j})^2 + (z_I - z_{s_j})^2} \quad (4.11)$$

将式子在坐标真值 $[x \ y \ z]^T$ 处展开成泰勒级数, 只保留一次项可得,

$$\begin{aligned} \hat{r}_r^j &= \sqrt{(x - x_{s_j})^2 + (y - y_{s_j})^2 + (z - z_{s_j})^2} + \frac{\partial r_{I_j}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial r_{I_j}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial r_{I_j}}{\partial z} \delta z \\ &= \sqrt{(x - x_{s_j})^2 + (y - y_{s_j})^2 + (z - z_{s_j})^2} + \left(\frac{x - x_{s_j}}{r_j} \delta x + \frac{y - y_{s_j}}{r_j} \delta y + \frac{z - z_{s_j}}{r_j} \delta z \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\delta x = x_I - x, \delta y = y_I - y, \delta z = z_I - z$$

视线向量表示为:

$$e_r^s = \frac{r^s(t^s) - r_r(t_r)}{\|r^s(t^s) - r_r(t_r)\|} \quad (4.13)$$

令 δr^e 表示地球系(e 系)下的位置误差量, $\delta r^e = [\delta x \ \delta y \ \delta z]^T$ 。

由惯导推算的几何距离为:

$$\hat{r}_r^j \approx r_r^j - \bar{e}_r^j \delta r^e \quad (4.14)$$

由惯导推算的双差几何距离为:

$$\hat{r}_{rb}^{jk} \approx r_{rb}^{jk} + (\bar{e}_r^k - \bar{e}_r^j) \cdot \delta r^e \quad (4.15)$$

将式(4.10)与式(4.15)作差可得卡尔曼滤波观测值如下:

$$\begin{aligned}\delta z_p &= -(\bar{e}_k - \bar{e}_j) \cdot \delta r^e + I_{rb}^{jk} + T_{rb}^{jk} \\ \delta z_\Phi &= -(\bar{e}_k - \bar{e}_j) \cdot \delta r^e - I_{rb}^{jk} + T_{rb}^{jk} + \lambda_i \nabla \Delta N_{rb}^{jk} \\ &= -(\bar{e}_k - \bar{e}_j) \cdot \delta r^e - I_{rb}^{jk} + T_{rb}^{jk} + \lambda_i (B_{rb,i}^j - B_{rb,i}^k)\end{aligned}\quad (4.16)$$

综合上述观测值可得系统观测值如下:

$$\begin{aligned}Z &= \begin{bmatrix} Z_p^T & Z_\Phi^T \end{bmatrix}^T \\ Z_p^T &= [\delta z_{p_1} \quad \delta z_{p_2} \quad \cdots \quad \delta z_{p_n}]^T \\ Z_\Phi^T &= [\delta z_{\Phi_1} \quad \delta z_{\Phi_2} \quad \cdots \quad \delta z_{\Phi_n}]^T\end{aligned}\quad (4.17)$$

观测方程表示为:

$$Z = HX + V \quad (4.18)$$

为便于分析导航误差,选取导航系位置误差作为状态量,因此需要对地球系下的位置误差 $\delta r^e = [\delta x \quad \delta y \quad \delta z]^T$ 进行转换。由式(2.3)可将大地坐标转换为直角坐标,式(2.3)分别对纬度、经度和高程误差求导可得,

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R_N + h) \cos \lambda \sin \varphi & -(R_N + h) \cos \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -(R_N + h) \sin \varphi \sin \lambda & (R_N + h) \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ [R_N(1 - e^2) + h] \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varphi \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

由式(2.7)可推导地心地固系位置误差与导航系位置误差转换关系,

$$\begin{bmatrix} \delta \varphi \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} = D_R^{-1} \begin{bmatrix} \delta r_N \\ \delta r_E \\ \delta r_D \end{bmatrix}, D_R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_N + h) \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

将式(4.20)代入式(4.19)可得,

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R_N + h) \cos \lambda \sin \varphi / (R_M + h) & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -(R_N + h) \sin \varphi \sin \lambda / (R_M + h) & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ [R_N(1 - e^2) + h] \cos \varphi / (R_M + h) & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_N \\ \delta r_E \\ \delta r_D \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

令

$$C_1 = \begin{bmatrix} -(R_N + h) \cos \lambda \sin \varphi / (R_M + h) & -\sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda \\ -(R_N + h) \sin \varphi \sin \lambda / (R_M + h) & \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda \\ [R_N(1 - e^2) + h] \cos \varphi / (R_M + h) & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

载波相位观测值中用户位置为天线相位中心,而惯导计算的位置、速度处于IMU中心,因此需要将位置改正数转换到IMU中心。

设天线相位中心在 n 位置为 r_{GNSS}^n ,IMU中心在 n 系位置为 r_{IMU}^n ,IMU中心到天线相位中心的杆臂为 l_{GNSS}^b ,关系式如下:

$$r_{GNSS}^n = r_{IMU}^n + D_R^{-1} C_b^n l_{GNSS}^b \quad (4.23)$$

根据 IMU 位置推算的接收机天线位置为:

$$\begin{aligned} \hat{r}_{GNSS}^n &= \hat{r}_{IMU}^n + D_R^{-1} \hat{C}_b^n l_{GNSS}^b \\ &= r_{IMU}^n + D_R^{-1} \delta r_{IMU}^n + D_R^{-1} [I - (\phi \times)] C_b^n l_{GNSS}^b \\ &= r_{GNSS}^n + D_R^{-1} \delta r_{IMU}^n + D_R^{-1} [(C_b^n l_{GNSS}^b) \times] \phi \end{aligned} \quad (4.24)$$

由(4.24)有如下式子,

$$\delta r_{GNSS}^n = \delta r_{IMU}^n + [(C_b^n l_{GNSS}^b) \times] \phi \quad (4.25)$$

由 $\phi = \psi + \delta\theta$, $\delta\theta$ 较小省略不计,

$$\delta r_{GNSS}^n \approx \delta r_{IMU}^n + [(C_b^n l_{GNSS}^b) \times] \psi \quad (4.26)$$

假定

$$C_2 = [(C_b^n l_{GNSS}^b) \times] \quad (4.27)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{n \times (n+1)} \quad (4.28)$$

$$E = [e_r^1, e_r^2, \dots, e_r^n]^T \quad (4.29)$$

可推导出设计矩阵 H 如下:

$$H = \begin{bmatrix} H_p \\ H_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DE \cdot C_1 & 0_{n \times 3} & DE \cdot C_1 \cdot C_2 & 0_{n \times 12} & 0_{n \times n} \\ DE \cdot C_1 & 0_{n \times 3} & DE \cdot C_1 \cdot C_2 & 0_{n \times 12} & D\lambda \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

其中, n 为双差观测值个数。 E 为视线向量矩阵。

$$R = \begin{bmatrix} D \text{diag}(R_{\Phi,i}) D^T & 0 \\ 0 & D \text{diag}(R_{P,i}) D^T \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$R_{\Phi,i} = \text{diag}(2\sigma_{\Phi,i}^{1 \ 2}, 2\sigma_{\Phi,i}^{2 \ 2}, 2\sigma_{\Phi,i}^{3 \ 2}, \dots, 2\sigma_{\Phi,i}^{n \ 2}) \quad (4.32)$$

$$R_{P,i} = \text{diag}(2\sigma_{P,i}^{1 \ 2}, 2\sigma_{P,i}^{2 \ 2}, 2\sigma_{P,i}^{3 \ 2}, \dots, 2\sigma_{P,i}^{n \ 2})$$

$\sigma_{P,i}^n$ 为 L_i 信号站间单差伪距观测误差, $\sigma_{\Phi,i}^n$ 为 L_i 信号站间单差相位观测误差。

4.2.3 估计误差反馈

1. 位置

利用卡尔曼滤波估计出状态误差后, 为了使惯导误差得到控制, 需要利用估计出的状态误差对导航结果进行校正。由 $\hat{q}_n^e = q_c^e$ 水平位置误差校正如下所示,

$$q_{n(k)}^{e(k)} = q_{c(k)}^{e(k)} \otimes q_{n(k)}^{c(k)} \quad (4.33)$$

$$q_{n(k)}^{c(k)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\delta\theta\| \\ -\frac{\sin\|0.5\delta\theta\|}{\|0.5\delta\theta\|} 0.5\delta\theta \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

其中 $\delta\theta$ 可用式(2.7)计算。

高度利用下式校正,

$$h = \hat{h} + \delta \hat{r}_D \quad (4.35)$$

2. 速度

ψ 角误差模型下速度校正如下所示,

$$\mathbf{v}^n = \hat{\mathbf{v}}^n - \delta \hat{\mathbf{v}}^c + \delta \boldsymbol{\theta} \times \hat{\mathbf{v}}^n \quad (4.36)$$

3. 姿态

由 $\hat{\mathbf{q}}_b^n = \mathbf{q}_b^p$, ψ 角误差模型下姿态校正如下所示,

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{q}_{p(k)}^{n(k)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{p(k)} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{q}_{p(k)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\hat{\boldsymbol{\phi}}\| \\ -\frac{\sin\|0.5\hat{\boldsymbol{\phi}}\|}{\|0.5\hat{\boldsymbol{\phi}}\|} 0.5\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\psi}} + \delta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ 。

4. 陀螺仪和加表零偏、比例因子

$$b = \hat{b} - \delta b \quad (4.39)$$

$$s = \hat{s} - \delta s$$

5. 里程计比例因子

$$s_{odom} = \hat{s}_{odom} - \delta s_{odom} \quad (4.40)$$

4.3 INS 辅助周跳探测与处理

当卫星信号受到遮挡、干扰或载体进行大机动时,接收机会对信号失锁,GNSS 信号中断会使得接收机整周计数停止累积,在信号恢复后导致信号的整周计数发生跳变。载波波长约为 0.2m,若不能正确探测出周跳并处理,高精度定位将受到周跳的严重影响。在 GNSS 信号中断后,重捕获的时间一般在 1s 以内,然后进行半周模糊度解算,这一过程最多需要 12s,即导航电文两子帧周期,最后信号恢复正常跟踪。在一般场景下,大部分的周跳持续时间较短,在进行 GNSS/INS 组合导航时,利用 INS 具备较高的短期精度和动态响应能力,可以在 GNSS 信号中断时提供短期的高精度的推算位置和状态方差,这些信息有助于周跳的探测与处理,利用 INS 辅助周跳探测与处理有效的弥补了 GNSS 信号易受干扰的不足。

4.3.1 周跳探测方法

对于 GNSS 周跳探测与修复问题,已有较多相关研究工作,主要包括多项式拟合法、高次差法、已知基线法、伪距相位组合法(Han, 1997)、双频载波相位电离层残差法(何海波, 2002)、多普勒积分法(Xu, 2007)、相位差分法、TurboEdit 法(Blewitt, 1990)、TECR 法(Liu, 2011)、卡尔曼滤波法(杨元喜, 2006)、用星间单差观测值探测、用双频 P 码伪距及载波观测值探测和三次差法(袁洪和万卫星, 1998)等。这些方法

基于 GNSS 观测值，对小周跳不敏感，动态情况下难以保证稳定性。由于惯导具有较高的短期精度和动态响应能力，其有助于周跳探测与修复(Lipp A et al., 1994; Lee et al., 2003; 韩厚增, 2017)。

1) 构建探测模型

为了增加周跳探测算法可靠性，本文利用 GF 组合与 MW 组合进行周跳探测。由于 INS 短期精度较高，用其预测双差卫地距可以对周跳进行有效探测。周跳探测模型如下：

$$\phi_{rb}^{jk} = \frac{r_{rb}^{jk}}{\lambda} - \frac{I_{br}^{jk}}{\lambda} + C_{br}^{jk} + \varepsilon_{\phi,br}^{jk} \quad (4.41)$$

$$D = C_{rb}^{jk} + \varepsilon_{\phi,br}^{jk} + \varepsilon_{I,br}^{jk} + \varepsilon_{\phi,br}^{jk} \quad (4.42)$$

其中 I_{br}^{jk} 为电离层残差， D 为周跳探测统计值， C_{br}^{jk} 为周跳值。 $\varepsilon_{\phi,br}^{jk}$ 、 $\varepsilon_{I,br}^{jk}$ 和 $\varepsilon_{\phi,br}^{jk}$ 分别表示惯导预测位置带来的几何距离误差，电离层残差，双差相位观测误差及未建模误差。短基线或基站与流动站高差较小时，对流层双差残余误差及星历误差影响可省略不计。

未发生周跳时，决策量的统计特性如下：

$$\begin{aligned} E[D_i] &= 0 \\ \sigma[D_i]^2 &= \text{cov}(D_i) = \text{cov}(\varepsilon_{\phi,br}^{jk}) + \text{cov}(\varepsilon_{I,br}^{jk}) + \text{cov}(\varepsilon_{\phi,br}^{jk}) \\ &= (H_{i,1:3} C_n^e) P_r (H_{i,1:3} C_n^e)^T + \beta P_I \beta + \text{cov}(\varepsilon_{\phi,br}^{jk}) \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.43)$$

其中， P_r 为位置误差方差， P_I 为电离层误差方差，其中方差由预测方差得到，取 3 倍 P 阵对应分量（置信水平 99.74%）为式中误差方差。 $H_{i,1:3}$ 为设计矩阵， m 为双差观测值维数。

系统建模削弱了各种系统误差及相关性，因此决策量满足高斯分布，构造检验统计量，原假设为所有卫星未发生周跳，备择假设为 t 时刻有卫星发生周跳。

$$\begin{aligned} H_0 : D &\sim N(0, \text{cov}(D_i)) \\ H_k : D &\sim N(k, \text{cov}(D_i)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

其中， k 表示周跳值。

周跳探测完备性取决于两个统计量，第一类错误是指未发生周跳，但统计量超过检测阈值，即误警（False Alarm, FM）。第二类错误表示发生了周跳，但统计量未超过检测阈值，即漏判（Missed Detection, MD）。

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P(|D| \geq T_D | H_0) = \text{erfc}\left(\frac{T_D}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ P_{MD} &= P(|D| < T_D | H_k) = \text{erfc}\left(\frac{k - T_D}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \text{erfc}\left(\frac{k + T_D}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ \text{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad (4.45)$$

其中, T_D 表示周跳探测阈值。式(4.45)在 $k=1$ 时取最大值。

周跳探测统计量受到 GPS 观测值残差与 INS 误差影响, GPS 误差与卫星高度角有关, INS 对预测值影响一致, 检测阈值应考虑卫星差异。在确定周跳误判率后可选择检测阈值,

$$T_D = \varepsilon_\alpha \cdot \sigma \quad (4.46)$$

式中, ε_α 为置信水平 α 下的临界值。 σ 由周跳未发生时探测统计量时间序列的均方根误差进行实时估计。

2) 构造组合观测值

利用组合观测值的特性可以探测周跳。线性组合观测值通用形式可表示为(4.47), 其中 i 、 j 为组合系数。

$$\Delta \nabla \phi(i, j) = \frac{i \cdot f_1 \Delta \nabla \phi_1 + j \cdot f_2 \Delta \nabla \phi_2}{i \cdot f_1 + j \cdot f_2} \quad (4.47)$$

组合观测值电离层延迟因子 β 和噪声因子 μ 为:

$$\begin{aligned} \beta(i, j) &= \frac{f_1^2(i/f_1 + j/f_2)}{i \cdot f_1 + j \cdot f_2} \\ \mu(i, j) &= \frac{\sqrt{(i \cdot f_1)^2 + (j \cdot f_2)^2}}{i \cdot f_1 + j \cdot f_2} \end{aligned} \quad (4.48)$$

周跳探测统计量的精度为:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\hat{\phi}, br}^{jk^2} + (\beta(i, j) \varepsilon_{I, br}^{jk})^2 + \varepsilon_{T, br}^{jk^2} + (\mu(i, j) \varepsilon_{\phi, br}^{jk})^2}}{\lambda(i, j)} \quad (4.49)$$

由经验公式计算 INS 定位误差,

$$\varepsilon_{\Delta \nabla \phi} = \sqrt{(g \nabla_b \frac{t^3}{6}) + (\varepsilon_b \frac{t^2}{2})} \quad (4.50)$$

其中 ∇_b 和 ε_b 分别为陀螺仪和加表零偏值。

在不同组合观测值中, 几何无关组合 (GF) 消除了卫星和接收机钟差、几何距离影响, 削弱了电离层延迟, 对小周跳较为敏感, MW 组合消除了接收机和卫星钟差、电离层和对流层延迟和几何距离, 多用于动态、非差观测值的周跳探测。高采样率下, 将 GF 组合观测值在历元间求差可用于探测周跳; 低采样率下, GF 组合观测值易受残余电离层误差的影响, 需对 GF 组合进行拟合, 单独利用 GF 组合无法有效进行周跳修复。MW 组合可通过确定宽巷模糊度来探测周跳, 但探测精度受到伪距观测精度的影响。本文采用 GF 组合与 MW 组合观测值, 利用 INS 提供的短期精度高的预测信息可以发挥 GF 组合与 MW 组合探测周跳的优势。

4.3.2 周跳处理方法

在周跳被正确探测出来以后, 可通过两种方法进行处理, 第一种是对探测出的周跳进行修复, 即先估计出准确的周跳个数, 然后对发生周跳的历元及后续历元统

一补偿周跳值，可利用惯导信息辅助周跳修复，如(4.51)所示，

$$C_{rb}^{jk} = \text{round}(D) \quad (4.51)$$

其中， round 表示对周跳探测统计量取最近整数。

周跳修复成功率表示如下：

$$P_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\text{erfc} \left(\frac{i - |D - \text{round}(D)|}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \text{erfc} \left(\frac{i + |D - \text{round}(D)|}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \quad (4.52)$$

给定置信水平 α ，若 $P_0 > \alpha$ ，认为修复成功。

第二种是探测出周跳后设置未知数重新估计模糊度。不正确的修复会影响后续所有观测值及解算结果，采用参数估计的方法虽然会增加参数数量，但是周跳发生前后历元模糊度满足差值为整数的关系，在惯导辅助的双差定位模式下，模糊度易于固定，因此本文采用第二种方法处理周跳。

重新估计模糊度时，可以利用双差载波相位观测值与 INS 推算的双差几何距离重置模糊度近似值，如式(4.53)所示，然后进行正常的滤波测量更新与模糊度解算过程，相较于无 INS 辅助，此时 INS 提供了较为精确的预测位置与较小的预测位置方差。

$$N_{rb}^{jk} = \Phi_{rb}^{jk} - \rho_{rb}^{jk} \quad (4.53)$$

4.4 INS 辅助模糊度固定

整周模糊度的快速正确固定是载波相位相对定位获取高精度定位结果的关键。在复杂环境中，GNSS 发生周跳进行模糊度重新固定时，由于初始伪距误差较大，模糊度搜索空间较大，同时过程噪声也较大，状态估计收敛至稳定的水平需较长时间。惯导的预测信息可以有效减少模糊度搜索空间，进而提高模糊度固定率、改善模糊度搜索时间以及可靠性等(Scherzinger, 2002; Petovello, 2003)。

4.4.1 解算方法

常用的 INS 辅助模糊度固定的方法包括利用 INS 位置构建虚拟观测值和将模糊度参数进行状态扩维等。第一种方法利用 INS 短期精度较高的优势，在 GNSS 信号中断时，将 INS 预测的位置信息作为先验信息对双差伪距和载波相位进行约束。此方法可以在当前历元滤波更新前估计出准确的模糊度，从而减小更新时的计算量。第二种方法将模糊度参数作为新的状态向量扩展到传统组合导航状态误差模型中，利用双差伪距和载波相位观测模型对状态预测传递的误差进行修正。这种方法将导航参数误差、惯性器件误差与模糊度进行集中滤波，在模糊度固定以后可将其作为已知参数进行保持，不进行估计，在发生周跳后对其进行重新估计，即 Fix and Hold 模式。其优点是整体只有一个滤波器，解算结果与中间计算信息可以充分使用，缺点是状态维数随观测信息的增多而增大，使得计算量增大，但可以在模糊

度固定后保持模糊度参数而不进行估计。本文采用集中式滤波实现紧组合。

4.4.2 INS 精度对模糊度解算影响

下面从理论上推导相较于独立的 GNSS 模糊度解算，利用 INS 辅助的模糊度解算的方法能有效提高模糊度浮点解精度，加快模糊度重新固定的原因。

紧组合模糊度固定实际上是通过状态估计向量的子向量与状态估计方差协方差 (Variance-Covariance, VCV) 矩阵的子矩阵对模糊度进行固定。对于惯导的辅助原理，一种解释为惯导辅助的双差观测模型增加了模糊度浮点解的可观测性。另一种解释为惯导推算的基线向量减小了模糊度搜索空间的体积。这两种解释是等价的。新息矩阵表征了随机估计的可观测性，可用 VCV 矩阵的逆表示。在紧组合中，对应双差模糊度的 VCV 矩阵的逆 P_a^{-1} 表征了模糊度浮点解的可观测性。INS 位置精度对模糊度浮点解的精度影响可用模糊度精度衰减因子 (Ambiguity Dilution Of Precision, ADOP) 和模糊度解算精度改善比率表示。

1. INS 位置精度对 ADOP 值的影响

ADOP 定义如式(4.54)所示，以周为单位， P_a 为模糊度方差阵， n 为维数。模糊度搜索空间的体积与模糊度精度衰减因子成正比。一般认为 ADOP 小于 0.2 周时，模糊度可以被成功固定(Teunissen P J G. 1997)。

$$ADOP = \left(\sqrt{\det(P_a)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.54)$$

选择 GNSS 信号中断后第一个观测历元来分析 INS 对模糊度重新固定的辅助作用。卡尔曼滤波量测更新后的 VCV 矩阵为：

$$P^+ = P^- - P^- H^T (H P^- H^T + R)^{-1} H P^- \quad (4.55)$$

其中，“-”为预测值，“+”为更新值。对式(4.56)进行分块，分离出模糊度对应的 VCV 矩阵，

$$P = \begin{bmatrix} P_s & P_{sa} \\ P_{sa}^T & P_a \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$P_s = \begin{bmatrix} P_{\delta r} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

式中， $P_{\delta r}$ 是惯导位置误差状态向量的 VCV 矩阵， P_2 是除位置误差以外的速度、姿态和惯性器件误差对应的 VCV 矩阵。

将式(4.30)进行分块，分离出模糊度对应的设计矩阵，

$$\begin{aligned} H_p &= [H_s \quad 0] \\ H_\Phi &= [H_s \quad H_a] \\ H_s &= [-DE \cdot C_1 \quad 0] = [A \cdot C_1 \quad 0] \\ H_a &= \lambda I \end{aligned} \quad (4.58)$$

其中 H_s 、 H_a 分别对应设计矩阵中省略杆臂影响后位置误差参数和模糊度参

数。 D 为将单差映射为双差的算子， E 是单位视线向量矩阵， C_1 是单差观测值的设计矩阵， λ 是载波的波长。

将式(4.56)、(4.57)、(4.58)代入式(4.55)可以获得更新后的模糊度的 VCV 矩阵为：

$$\begin{aligned} P_a^+ &= P_a^- - P_a^- H_a^T R_a^{-1} H_a P_a^- \\ &= P_a^- - P_a^- H_a^T (AC_1 P_{\delta r}^- C_1^T A^T + H_a P_a^- H_a^T + R_\phi)^{-1} H_a P_a^- \\ &= P_a^- - \lambda^2 P_a^- (AC_1 P_{\delta r}^- C_1^T A^T + \lambda^2 P_a^- + R_\phi)^{-1} P_a^- \end{aligned} \quad (4.59)$$

其中 P_a^- 是预测模糊度 VCV 矩阵， $P_{\delta r}^-$ 是预测位置 VCV 矩阵， R_ϕ 是载波相位双差观测值的测量噪声协方差矩阵。

在 GNSS 信号完全失锁后， P 矩阵中与模糊度参数有关的部分需要进行重置，

$$P_a^- = \sigma_{a_0}^2 D^T D, P_{sa}^- = 0 \quad (4.60)$$

其中， $\sigma_{a_0}^2$ 为模糊度初始方差。

若单纯使用 GNSS 观测数据， $P_{\delta r}^-$ 表示伪距差分定位得到的位置 VCV 矩阵，若加入 INS 数据则有如下关系(Zhang, 2006)，

$$P_{\delta r}^{-1} = P_{INS}^{-1} + P_{Code}^{-1} \quad (4.61)$$

由式(4.59)可知，模糊度浮点解的 VCV 矩阵 P_a^+ 与位置初始方差阵 $P_{\delta r}^-$ 有关。

对于，

$$\begin{aligned} P_{a_1}^+ - P_{a_2}^+ &= P_a^- H_a^T (R_{a_1}^{-1} - R_{a_2}^{-1}) H_a P_a^- \\ &= \lambda^2 \sigma_{a_0}^4 D^T D R_{a_2}^{-1} AC_1 (P_{\delta r_1}^- - P_{\delta r_2}^-) C_1^T A^T R_{a_1}^{-1} D^T D \end{aligned} \quad (4.62)$$

式(4.62)右侧为半正定矩阵和二次型的乘积，

则对于先验位置误差，

$$P_{\delta r_1}^- \leq P_{\delta r_2}^- \quad (4.63)$$

对应模糊度浮点解的 VCV 矩阵、模糊度可观测性和模糊度搜索空间体积关系如下：

$$\begin{aligned} P_{a_1}^+ &\leq P_{a_2}^+ \\ (P_{a_1}^+)^{-1} &\geq (P_{a_2}^+)^{-1} \\ ADOP_1 &\leq ADOP_2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

由式(4.61)可知，相较于单纯使用 GNSS 观测数据，INS 数据的加入将会减小 $P_{\delta r}^-$ 的值，进而减小 P_a^+ 的值。由式(4.63)和式(4.64)可知，在 GNSS 中断恢复时，惯导信息可以提供较为准确的先验位置及状态方差，有利于减小模糊度状态方差，增加模糊度的可观测性，减小模糊度搜索空间体积，进而加快模糊度重新固定。

2. INS 位置精度对模糊度解算精度改善比率的影响

将式(4.61)表示为方差形式，

$$\sigma_{\delta r} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_{INS}^2} + \frac{1}{\sigma_{Code}^2}}} = \frac{\sigma_{INS}\sigma_{Code}}{\sqrt{\sigma_{INS}^2 + \sigma_{Code}^2}} \quad (4.65)$$

若单纯使用 GNSS 观测数据， $\sigma_{\delta r} = \sigma_{Code}$ 。若加入 INS 数据，则 $\sigma_{\delta r} < \sigma_{Code}$ ，位置精度得到改善。

对于单纯使用 GNSS 观测数据的位置方差标准差 σ_{GNSS} 和紧组合的位置方差标准差 $\sigma_{GNSS/INS}$ ，加入惯导后模糊度解算精度改善比率可以表示如下：

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sigma_{GNSS} - \sigma_{GNSS/INS}}{\sigma_{GNSS}} \times 100\% \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_{INS}}{\sqrt{\sigma_{INS}^2 + \sigma_{Code}^2}} \right) \times 100\% \end{aligned} \quad (4.66)$$

这个指标一定程度上反映了相较于单纯使用 GNSS 观测数据，加入 INS 数据后，INS 位置精度对模糊度解算精度的改善效果。

4.5 车载辅助信息

车载辅助信息一般是指车辆自身约束信息或外部传感器信息，车辆自身约束信息包括零速修正、零速航向锁定和非完整性约束等，外部传感器信息包括里程计轮速、双天线航向、CAN BUS 方向盘转角和轮速、气压计高程和磁力计航向等。车载辅助信息一般通过约束车体的位置、速度和姿态等参数发挥辅助作用。下面为几种典型的车载辅助信息。

4.5.1 零速修正

零速修正 (Zero Velocity Update, ZUPT)，当载体处于静止状态时，载体速度为零，载体的位置也保持不变，以此时的零速作为速度观测值，相当于有精度较高的速度观测值来限制 INS 导航误差的积累，可以改善静止状态下的 GNSS/INS 组合导航结果。

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{v}_{IMU}^n - \mathbf{0}_{3 \times 1} = \delta \mathbf{v}^c \quad (4.67)$$

观测噪声一般设置为较小的常值，如 0.1m/s。

使用零速修正前需要先进行零速探测，可以根据 INS 原始数据或 ODO (Odometer) 原始数据判断是否进入零速修正。它的优势是只利用自身信息，对速度误差有较好的改善效果，不需要额外的辅助设备，不存在同步性问题，在 GNSS 定位结果有效或 GNSS 定位结果出现中断的情况都可以应用。限制是必须依靠静止状态。零速修正有利于限制观测误差的长期积累，有利于估计加表零偏和姿态角。一般不与非完整性约束一起使用。

4.5.2 零速姿态锁定

零速姿态锁定 (Zero Angular Rate Update, ZARU)，当载体的速度为零时，姿态可观测性较弱，在滤波过程中误差会逐渐积累。可以利用 ZUPT 或前向和右向陀螺约束横滚和俯仰角发散，航向角认为与初始时刻保持不变，由于载体速度为零，所以载体的牵连角速度为零，忽略地球自转的影响，认为此时航向角误差主要来自垂向的陀螺零偏，利用静止状态下陀螺仪的输出约束零偏误差。其优势是只利用自身信息，对航向角误差有较好的约束效果，限制是只适用于静止状态。

零偏计算值为：

$$\hat{b}_g = \begin{bmatrix} g_x / dt \\ g_y / dt \\ g_z / dt \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

零偏观测值为：

$$\tilde{b}_g = e_{b_g} \quad (4.69)$$

观测向量为：

$$\delta z_{b_g} = \hat{b}_g - \tilde{b}_g = \begin{bmatrix} g_x / dt \\ g_y / dt \\ g_z / dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - e_{b_g} \quad (4.70)$$

其中 g_x 、 g_y 和 g_z 分别表示陀螺仪三轴输出角增量。 e_{b_g} 为陀螺仪零偏噪声，一般取滤波估计收敛后的零偏误差均方差值。

4.5.3 非完整性约束

非完整性约束 (Non-Holonomic Constraint, NHC)，类似于一种动态的零速修正，在 GNSS 定位结果出现中断时限制惯性器件的长期误差积累。使用非完整性约束的前提条件包括运动载体沿载体坐标系前进方向运动，没有发生侧滑，即横向速度为零；载体贴近地表运动，没有发生颠簸，即垂向速度为零。这一约束建立在载体坐标系下，以载体横向和垂向的速度为零作为约束条件，将机械编排获得的速度转换至车体系作为观测值。它的优势是仅利用自身信息，可以保持运动状态。限制是车辆颠簸或侧滑时不满足约束条件，受路况等情况影响较大。

利用惯导计算车轮速度，

$$\begin{aligned} \hat{v}_{wheel}^v &= C_b^v \hat{C}_n^b \hat{v}_{imu}^n - C_b^v \hat{C}_n^b (\omega_{ie}^n \times + \omega_{en}^n \times) \hat{C}_b^n l_{wheel}^b - C_b^v (l_{wheel}^b \times) \hat{\omega}_{ib}^b \\ &\approx v_{wheel}^v + C_b^v C_n^b \delta v_{imu}^n - C_b^v C_n^b (v_{imu}^n \times) \phi - C_b^v (l_{wheel}^b \times) \delta \omega_{ib}^b \end{aligned} \quad (4.71)$$

观测速度表示如下：

$$\tilde{v}_{wheel}^v = v_{wheel}^v + e_v \quad (4.72)$$

令 $\tilde{v}_{wheel}^v$ 的 y 和 z 轴速度为零，观测噪声 e_v 设置为常数 0.1m/s，观测方程为：

$$\begin{aligned}\delta z_v &= \hat{v}_{wheel}^v - \tilde{v}_{wheel}^v \\ &\approx C_b^v C_n^b \delta v_{imu}^n - C_b^v C_n^b (v_{imu}^n \times) \phi - C_b^v (l_{wheel}^b \times) \delta \omega_{ib}^b - e_v\end{aligned}\quad (4.73)$$

v_{imu}^n 近似为 v_{imu}^c ，将 $\phi = \psi + \delta\theta$ 代入式子，可得，

$$\delta z_v = C_b^v C_n^b \delta v_{imu}^c - C_b^v C_n^b (v_{imu}^c \times) \psi - C_b^v (l_{wheel}^b \times) \delta \omega_{ib}^b - e_v \quad (4.74)$$

4.5.4 里程计辅助

里程计 (Odometer, ODO) 辅助，是建立在车辆速度观测模型下的一种约束，其与非完整性约束构成了车体系三维速度约束，主要利用里程计提供的载体前进方向的速度，对机械编排获得的速度结果进行约束。里程计测量的是车轮前向的速度，将式(4.72)中 x 轴速度表示为里程计速度，

$$\tilde{v}_{odo}^v = (1 + \delta s_{odo}) v_{odo}^v + e_v \quad (4.75)$$

观测噪声 e_v 设置为常数 0.1m/s。

在利用里程计辅助时，需要考虑里程计杆臂和比例因子的影响。因为急转弯时载体的运动状态发生剧烈变化，不考虑杆臂将对约束效果有一定的影响，而温度、受力变化、轮胎胎压等因素会影响轮胎半径，进而影响里程计速度观测值。其中杆臂通过事先测量利用式(4.74)进行补偿，比例因子误差通过状态扩维，建模为随机游走模型进行在线估计和校正。它的优势是可以保持运动状态，里程计信息在汽车中使用广泛，约束效果较好。限制是依赖外部设备提供约束信息，在车辆打滑时不满足约束条件。

4.5.5 双天线航向辅助

多天线测姿可以提供外部姿态信息，可在 GNSS 信号中断时对惯导姿态漂移误差起到约束作用，车载场景下主要利用航向角。主要原理是将姿态角误差表达成导航系姿态角误差的表达式，利用双天线测向获取的航向角对机械编排获取的航向角进行约束。

$$\hat{C}_v^n = \hat{C}_b^n (C_b^v)^T = [I - \Phi \times] C_b^n (C_b^v)^T \quad (4.76)$$

令 $\hat{a}_{ij}$, b_{ij} 和 c_{ij} 分别代表 $\hat{C}_v^n$, C_b^v , C_b^n 矩阵中第 i 行 j 列的元素，可得，

$$\hat{\psi} = \tan^{-1} \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \tan^{-1} \frac{\hat{a}_{21}}{\hat{a}_{11}} \quad (4.77)$$

其中 $\hat{a}_{11}$ 、 $\hat{a}_{21}$ 表达式如下：

$$\begin{cases} \hat{a}_{11} = b_{11}(c_{11} + c_{21}\Phi_z - c_{31}\Phi_y) + b_{12}(c_{12} + c_{22}\Phi_z - c_{32}\Phi_y) + b_{13}(c_{13} + c_{23}\Phi_z - c_{33}\Phi_y) \\ \hat{a}_{21} = b_{21}(c_{21} + c_{31}\Phi_x - c_{11}\Phi_z) + b_{22}(c_{22} + c_{32}\Phi_x - c_{12}\Phi_z) + b_{23}(c_{23} + c_{33}\Phi_x - c_{13}\Phi_z) \end{cases} \quad (4.78)$$

利用计算得到的姿态角与观测得到的姿态角组建航向角误差观测方程，

$$\delta z_{\psi} = \hat{\Phi}_z - \tilde{\Phi}_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \Phi_x} & \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \Phi_y} & \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \Phi_z} \end{bmatrix} \Phi + e_{\psi}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \Phi_x} = \frac{\hat{a}_{11}(c_{31}b_{11} + c_{32}b_{12} + c_{33}b_{13})}{\hat{a}_{11}^2 + \hat{a}_{21}^2} \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \Phi_y} = \frac{\hat{a}_{21}(c_{31}b_{11} + c_{32}b_{12} + c_{33}b_{13})}{\hat{a}_{11}^2 + \hat{a}_{21}^2} \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \Phi_z} = \frac{-(\hat{a}_{11}(c_{11}b_{11} + c_{12}b_{12} + c_{13}b_{13}) + \hat{a}_{21}(c_{21}b_{11} + c_{22}b_{12} + c_{23}b_{13}))}{\hat{a}_{11}^2 + \hat{a}_{21}^2} \end{cases} \quad (4.79)$$

由于安装原因，双天线与载体姿态并不保持一致，在利用双天线辅助时，需要对双天线安装角偏差进行补偿。航向辅助的优势是可以进行实时辅助，相较于其他辅助手段对航向角误差有较好的改善效果。限制是依赖外部设备提供航向信息。

4.6 抗差自适应滤波模型

4.6.1 抗差模型

当载体进行大机动或卫星信号受到遮挡或干扰时，接收机容易对信号失锁，导致 GNSS 观测值出现异常。在利用周跳进行粗差探测与剔除时，阈值过大会导致漏判，阈值过小会导致误警，因此一般将阈值设置在一个宽松的范围，使得仍存在部分小周跳和小粗差无法被有效识别，利用抗差卡尔曼滤波可以减小含有残余周跳与观测值粗差的观测值的影响，改善精度和可靠性。若观测值独立，可选用丹麦权函数、IGG III 权函数和 Tukey 双二次权函数构建权函数和相应等价协方差矩阵，若观测值相关，可以选用双因子等价协方差矩阵或双因子等价权矩阵。

在紧组合滤波模型中，计算卡尔曼滤波的新息和对应方差协方差矩阵为：

$$v_k = z_k - H_k x_{k/k-1} \quad (4.80)$$

$$P_v = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k \quad (4.81)$$

如果滤波模型与实际情况相符，新息统计特性应该表现为白噪声。滤波新息反映了观测值与状态估计之间的一致性，对观测值与状态估计之间的异常非常敏感。可利用新息探测系统模型与观测模型的粗差。

将新息向量转化为标准化向量，

$$s_{k,i} = \frac{|v_{k,i}|}{\sqrt{P_{v,i,i}}} \quad (4.82)$$

构造 IGG III 模型计算抗差因子 γ 如下：

$$\gamma_{k,i} = \begin{cases} 1 & s_{k,i} \leq k_0 \\ \frac{k_0}{s_{k,i}} \times \left[\frac{k_1 - s_{k,i}}{k_1 - k_0} \right]^2 & k_0 < s_{k,i} \leq k_1 \\ 0 & s_{k,i} > k_1 \end{cases} \quad (4.83)$$

其中阈值系数 k_0 和 k_1 由误警率 α 和漏判率 β 求得, 即 $k = n_{1-\alpha/2}(0,1) + n_{1-\beta}(0,1)$ 。 k_0 设置为 2.80 ($\alpha = 5\%$, $\beta = 20\%$), k_1 设置为 4.13 ($\alpha = 0.1\%$, $\beta = 20\%$) (韩厚增, 2017)。

滤波更新后, 将观测值方差设置如式(4.84)所示, 当 γ_k 取 0 时, 一般视为观测值不可用, 此时可以对其取极小值 (如 10^{-6}), 降低观测权重。

$$R_k = \frac{1}{\gamma_k} R_k \quad (4.84)$$

$1/\gamma_k$ 随 $s_{k,i}$ 的变化曲线如图所示,

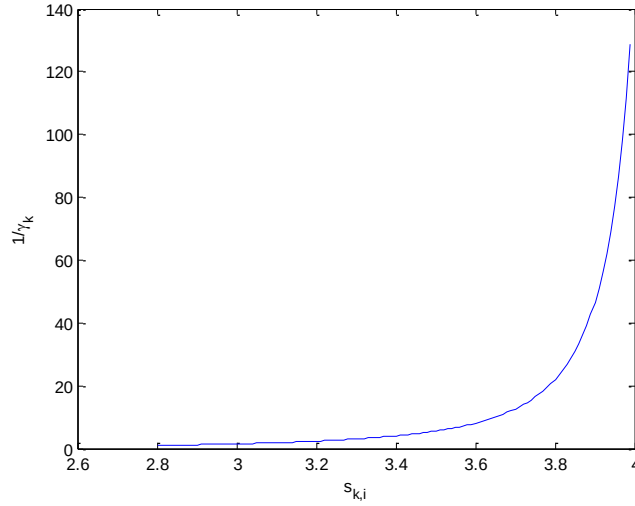


图 4.1 $1/\gamma_k$ 随 $s_{k,i}$ 的变化曲线

新息抗差模型主要处理观测模型中出现的粗差, 当系统模型存在粗差时, 其一般会对大多数观测新息造成影响, 这主要是由惯导的观测粗差引起。因此当新息序列中探测到的粗差占比过大 (如 75%), 同时确保 GNSS 有冗余观测值, 则认为惯导预测信息中存在粗差, 需要对滤波方差进行重置。

4.6.2 自适应模型

当惯性器件出现异常或载体进行大机动时, 线性化近似的物理模型不再符合载体的实际运动。当卫星信号受到遮挡或干扰时, 其噪声特性未知。需要构造自适应滤波模型对函数模型和随机模型进行修正。学界和工程领域已构造了多种自适应滤波模型, 包括 Sage-Husa 滤波、渐消滤波、基于方差分量估计的抗差自适应滤波等。

对实际动态系统的物理状况认识不足或进行了线性化近似, 会导致状态转移矩阵 $\Phi_{k/k-1}$ 和量测矩阵 H_k 不准确, 为了补偿这种系统模型误差, 建立函数模型如下:

$$\begin{cases} X(k) = (\Phi_{k/k-1} + \Delta\Phi_{k/k-1})X(k-1) + e(k-1) \\ Z(k) = (H_k + \Delta H_k)X(k) + \Delta(k) \end{cases} \quad (4.85)$$

假设虚拟动态噪声如下:

$$\begin{cases} \eta(k-1) = \Delta \Phi_{k/k-1} X(k-1) + e(k-1) \\ \xi(k) = \Delta H_k X(k) + \Delta(k) \end{cases} \quad (4.86)$$

则系统模型为:

$$\begin{cases} X(k) = \Phi_{k/k-1} X(k-1) + \eta(k-1) \\ Z(k) = H_k X(k) + \xi(k) \end{cases} \quad (4.87)$$

对随机变量的随机特性进行近似,

$$\begin{cases} E[\eta(k)] = \mu_e \\ E[\xi(k)] = \mu_\Delta \\ \text{cov}[\eta(k), \eta(j)] = D_e \delta(k-j) \\ \text{cov}[\xi(k), \xi(j)] = D_\Delta \delta(k-j) \\ \text{cov}[\eta(k), \xi(j)] = 0 \end{cases} \quad (4.88)$$

若上述噪声统计特性已知, 卡尔曼滤波估计一步预测为:

$$\begin{aligned} \hat{X}(k, k-1) &= \Phi_{k/k-1} \hat{X}(k-1) + \mu_e \\ P_{\hat{X}}(k, k-1) &= \Phi_{k/k-1} P_{\hat{X}}(k-1) \Phi_{k/k-1}^T + D_e \end{aligned} \quad (4.89)$$

新息为:

$$V_z(k) = Z(k) - H_k \hat{X}(k, k-1) - \mu_\Delta \quad (4.90)$$

增益矩阵为:

$$K_k = P_{\hat{X}}(k, k-1) H_k^T [H_k P_{\hat{X}}(k, k-1) H_k^T + D_\Delta]^{-1} \quad (4.91)$$

测量更新为:

$$\begin{aligned} \hat{X}(k) &= \hat{X}(k, k-1) + K_k V_z(k) \\ P_{\hat{X}}(k) &= (I - K_k H_k) P_{\hat{X}}(k, k-1) \end{aligned} \quad (4.92)$$

在多数情况中, μ_e 和 μ_Δ 未知, 需要作为状态参数进行估计以补偿 $\Phi_{k/k-1}$ 和 H_k 不准确导致的误差。此外噪声方差 D_e 和 D_Δ 不准确或者未知也需要观测值来修正估计。可以根据最大验后准则设计次优无偏极大验后估计器, 如式(4.93)所示, 利用状态不符值与观测新息来估计修正系统模型误差与观测误差。

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_e(k-1) &= \frac{k-2}{k-1} \hat{\mu}_e(k-2) + \frac{1}{k-1} (\hat{X}(k-1) - \Phi_{k/k-1} \hat{X}(k-2)) \\ \hat{\mu}_\Delta(k) &= \frac{k-1}{k} \hat{\mu}_\Delta(k-1) + \frac{1}{k} (Z(k) - H_k \hat{X}(k, k-1)) \\ \hat{D}_e(k-1) &= \frac{k-2}{k-1} \hat{D}_e(k-2) + \\ &\quad \frac{1}{k-1} (K_{k-1} V(k-1) V(k-1)^T K_{k-1}^T + P_{\hat{X}}(k-1) - \Phi_{k-1/k-2} P_{\hat{X}}(k-2) \Phi_{k-1/k-2}^T) \\ \hat{D}_\Delta(k) &= \frac{k-1}{k} \hat{D}_\Delta(k-1) + \frac{1}{k} (V(k) V(k)^T - H_k P_{\hat{X}}(k, k-1) H_k^T) \end{aligned} \quad (4.93)$$

为了控制历史观测值对自适应估计影响, 将次优无偏极大验后估计器中的 $1/k$ 替换为 d_k , 可以得到 Sage-Husa 估计方法(Sage A P, Husa G W. 1969)。Sage-Husa 估

计方法常用于状态模型的自适应估计，如式(4.94)所示，

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_e(k-1) &= (1-d_{k-1})\hat{\mu}_e(k-2) + d_{k-1}(\hat{X}(k-1) - \Phi_{k/k-1}\hat{X}(k-2)) \\
 \hat{\mu}_\Delta(k) &= (1-d_k)\hat{\mu}_\Delta(k-1) + d_k(Z(k) - H_k\hat{X}(k, k-1)) \\
 \hat{D}_e(k-1) &= (1-d_{k-1})\hat{D}_e(k-2) + \\
 & d_{k-1}(K_{k-1}V(k-1)V(k-1)^TK_{k-1}^T + P_{\hat{X}}(k-1) - \Phi_{k-1/k-2}P_{\hat{X}}(k-2)\Phi_{k-1/k-2}^T) \\
 \hat{D}_\Delta(k) &= (1-d_k)\hat{D}_\Delta(k-1) + d_k(V(k)V(k)^T - H_kP_{\hat{X}}(k, k-1)H_k^T)
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

其中 $\hat{D}_e(k-1)$ 对应过程噪声 $Q(k-1)$ ， $\hat{D}_\Delta(k)$ 对应观测噪声 $R(k)$ 。

4.7 算法结构设计

紧组合数据处理流程如图 4.2 所示，主要流程包括 INS 计算模块初始化、卡尔曼滤波初始化、惯性导航算法、卡尔曼时间更新、构建卡尔曼滤波观测量、周跳探测、模糊度在线解算、紧组合解算、反馈修正和导航结果输出。

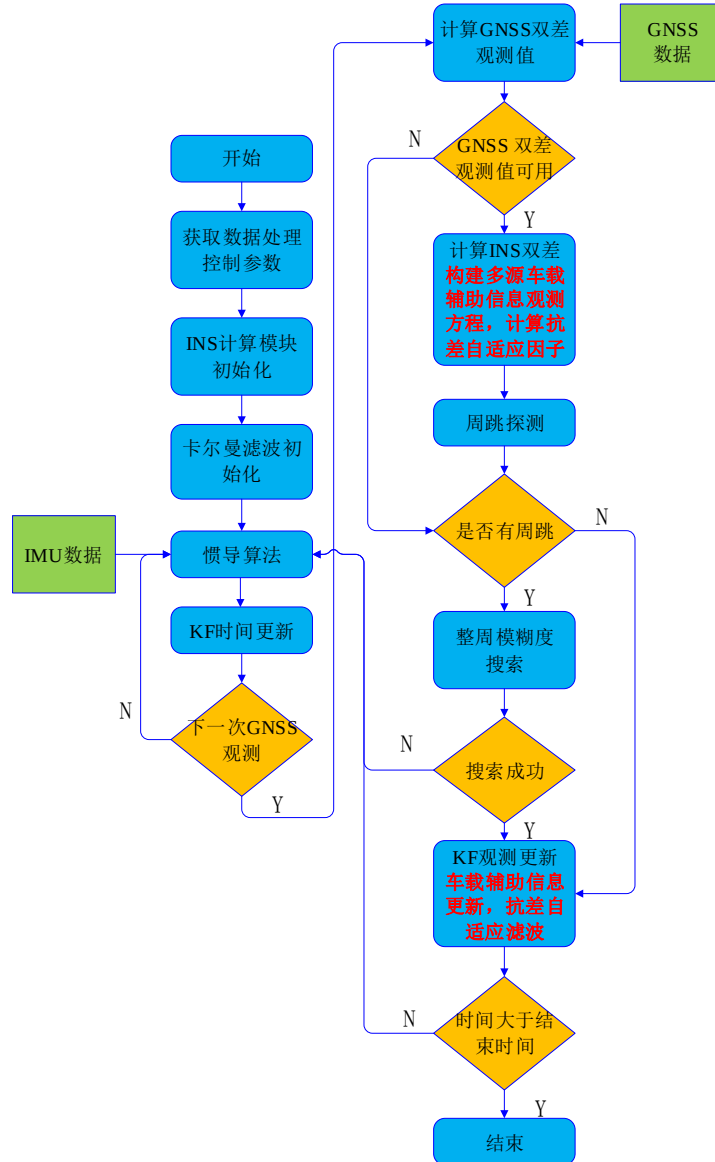


图 4.2 GNSS RTK/INS 紧组合数据处理流程图

紧组合数据处理流程主要分为以下步骤，

1. INS 计算模块初始化。主要完成初始对准，软件支持静态粗对准，动对准以及给定姿态对准，动对准利用 GNSS 速度或里程计速度获取姿态信息。
2. 卡尔曼滤波初始化。构建系统噪声阵，状态矩阵，设置导航参数误差与惯性器件参数误差的初始方差。
3. 惯性导航算法。主要包括 IMU 误差补偿与惯导机械编排。在进行惯导解算前，对 IMU 数据补偿零偏与比例因子误差，如式(2.19)所示，补偿的误差项由上一历元滤波计算得到。对经过误差补偿的 IMU 数据进行速度、位置和姿态更新。计算一些中间信息用于构建卡尔曼滤波方程。
4. 卡尔曼滤波时间更新。计算预测状态量和对应的状态方差协方差矩阵。
5. 构建卡尔曼滤波观测量。利用接收机输出的伪距和载波相位分别计算双差伪距和双差载波相位观测值，利用 INS 位置推算 GNSS 接收机天线相位中心位置，进而推算出双差几何距离。利用多源车载辅助信息构建观测方程。
6. 周跳探测。利用 INS 推算的位置信息辅助 GNSS 周跳探测。
7. 紧组合解算。进行卡尔曼滤波更新，计算抗差自适应模型参数，利用接收机中的伪距、载波相位观测信息修正 INS 漂移误差，获得更新后的状态量和状态方差协方差。
8. 模糊度在线解算。利用滤波更新计算得到的模糊度浮点值与方差协方差信息，进行模糊度搜索和确认以获得整周模糊度。将整周模糊度回代到导航参数中获得导航参数固定解。若未发生周跳，则保持模糊度参数不变，直接进行滤波更新。若发生周跳，则利用双差载波相位观测值与 INS 推算的双差几何距离重置模糊度初值，再进行模糊度搜索与确认。
9. 反馈修正。将滤波估计得到的导航参数误差对惯导机械编排结果进行修正，将估计得到的加表和陀螺仪的零偏和比例因子误差反馈到 IMU 原始数据中，构成闭环反馈。
10. 导航结果输出。可选择输出所需位置、速度和姿态导航结果，INS 误差参数以及对应估计方差。

算法结构如图 4.3 所示，主要分为捷联惯导计算，双差 GNSS 计算与 GNSS/INS 卡尔曼滤波三个部分。

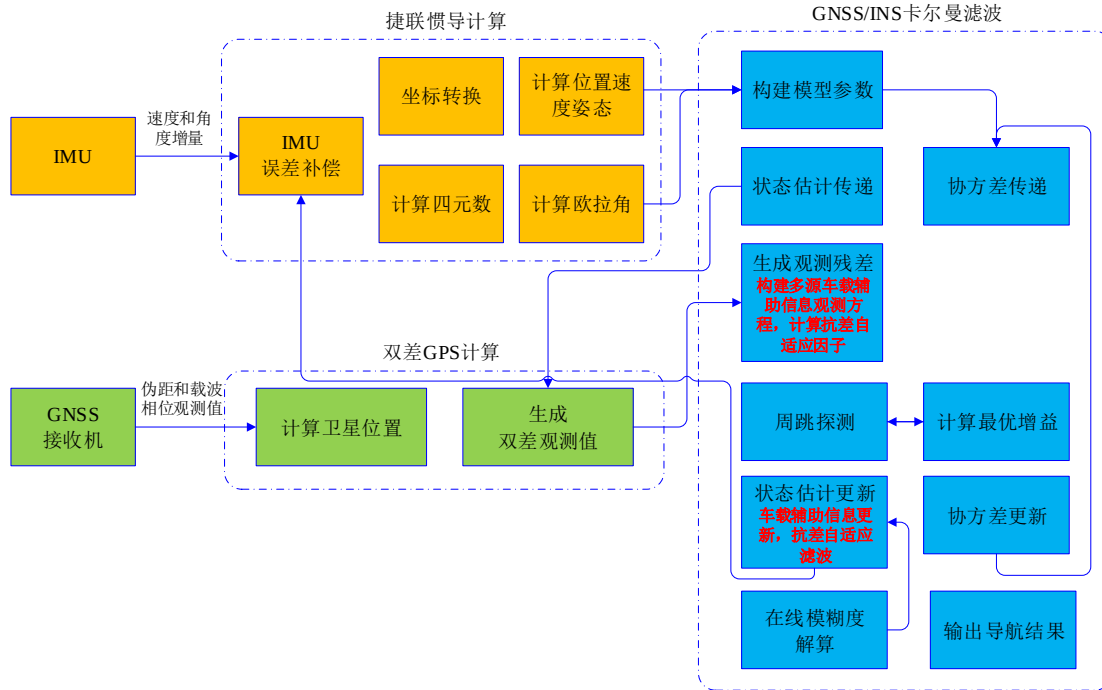


图 4.3 软件算法结构图

4.8 本章小结

本章主要阐述了RTK紧组合算法原理与基本的软件结构和流程。首先引出了卡尔曼滤波原理，其次给出了RTK紧组合算法原理，包括状态方程和观测方程的建立，然后阐述了INS辅助下利用GF与MW组合观测值探测周跳的方法，给出了INS辅助模糊度固定的方法，从理论上分析了INS精度对模糊度解算的影响。再者在GNSS RTK/INS紧组合算法中引入多源车载辅助信息和抗差自适应模型，最后对软件算法的结构进行总结。

5. RTK/INS 紧组合车载实验与分析

5.1 实验设备及参数

实验设备包括, Trimble NetR9 接收机 2 台 (用作基站与流动站), 采样率为 1Hz, 参考系统为导航级组合导航系统 (LD_A15), 采样率为 200Hz, 内置高精度激光陀螺与高精度 GNSS OEM 板卡, 实验系统为高精度 MEMS IMU POS1100, 两款惯导性能指标如表 5.1 和表 5.2,

表 5.1 LD_A15 性能指标

参数		数值
陀螺仪	零偏(degree/h)	0.005
	白噪声(degree/ $\sqrt{h}$)	0.0022
	比例因子(ppm)	10
加表	零偏(mGal)	25
	白噪声(m/s/ $\sqrt{h}$)	0.00075
	比例因子(ppm)	10

表 5.2 POS1100 性能指标

参数		数值
陀螺仪	零偏(degree/h)	10
	白噪声(degree/ $\sqrt{h}$)	0.2
	比例因子(ppm)	1000
加表	零偏(mGal)	1000
	白噪声(m/s/ $\sqrt{h}$)	0.18
	比例因子(ppm)	1000

车顶设备连线如图 5.1 所示, 所有测试设备均固定在铝制金属板设计好的安装孔位上, 试验载体为某型号车辆, 铝制金属板固连到车顶上方, 整体稳固无晃动, 各设备间没有相对位移, 可以保证各系统测量的姿态基本一致。



图 5.1 设备布局图

5.2 RTK/INS 紧组合性能分析评估方法

检验算法正确性与性能的方法主要有两种。第一种为仿真 GNSS 信号中断，考察导航系统位置、速度和姿态漂移。第二种为惯性器件估计误差与器件参数的一致性。

对于开阔环境测试，将高精度惯导数据通过商业软件处理得到的 GNSS RTK/INS 松组合反向平滑结果作为参考。以 NHC、ODO 两种辅助信息为例，利用开阔环境数据验证紧组合算法在无车载辅助、NHC 辅助、NHC 与 ODO 辅助条件下的导航性能。统计多组数据 GNSS 信号中断时位置、速度和姿态均方根误差。验证紧组合算法的正确性与多源辅助信息的辅助效果。

GNSS RTK/INS 紧组合算法中，模糊度固定率与 GNSS 信号中断后模糊度重收敛时间是验证高精度定位的重要性能指标。可仿真不同长时的 GNSS 信号中断，比较无车载辅助、NHC 辅助、NHC 和 ODO 辅助条件下模糊度固定率与模糊度重收敛时间统计结果。

城市环境中，GNSS 信号易受到频繁遮挡、干扰和多路径的影响，利用城市综合环境数据可以验证算法的抗差自适应效果。方法为以高精度惯导 GNSS RTK/INS 松组合反向平滑结果为参考，对比普通 GNSS RTK/INS 紧组合算法与加入抗差自适应模型改进后的紧组合算法的导航误差以及模糊度固定率，进一步验证算法的可用性和可靠性。

5.3 RTK 紧组合性能验证与分析

5.3.1 开阔环境无车载辅助测试

开阔环境测试场景如图 5.2 所示，测试区域位于武汉市佛祖岭，场景为开阔天空，时长约为 1h，含有较丰富的静止、加减速、匀速、转弯等典型运动场景。加减速和拐弯等机动动作有利于分离相关状态误差的估计，增加 INS 可观性。参考设备为导航级惯导 LD_A15，实验设备为高精度 MEMS IMU POS1100，基线长度、卫星数和 DOP 值如图 5.3 所示。由图 5.2 和图 5.3 可知，测试基线长为 12-15km，卫星数基本在 8 颗以上，卫星几何分布良好。



图 5.2 开阔环境实测轨迹场景

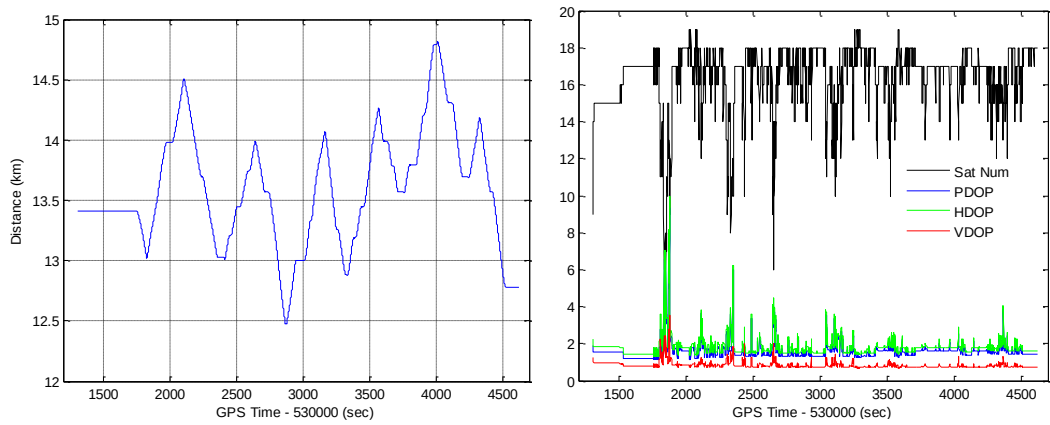


图 5.3 基线长度，卫星数及 DOP 值

下面对算法的基本性能进行验证，主要比较 POS1100 紧组合计算结果与参考结果的位置、速度和姿态误差。参考结果采用商业软件 GINS 处理 LD_A15 的松组合反向平滑结果，将其结果投影至 POS1100 所在处。图 5.4 给出了连续 GNSS 辅助下紧组合导航结果误差，由图 5.4 可知，位置误差主要分布在 5cm 以内，速度误差在 0.01m/s 以内，水平姿态误差在 0.05deg 以内，航向姿态误差在 0.2deg 以内。

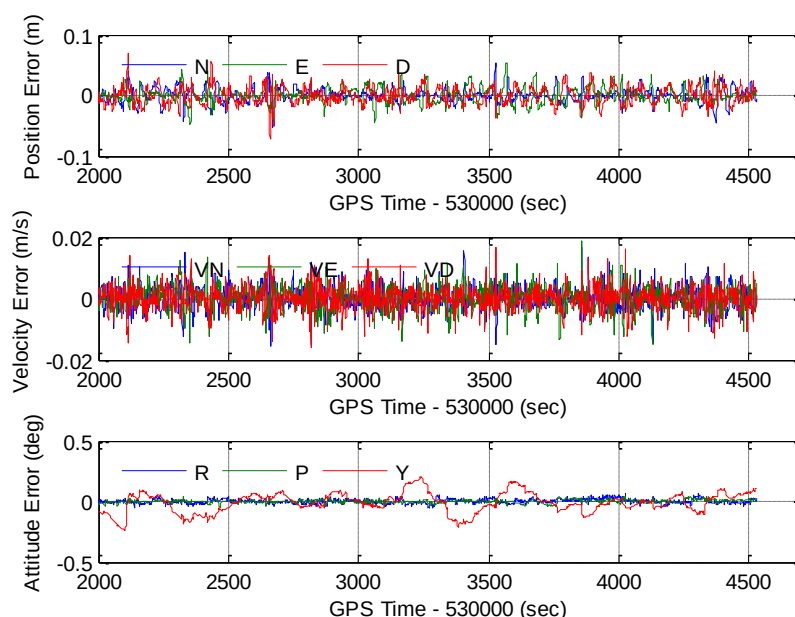


图 5.4 连续 GNSS 辅助下紧组合导航结果误差图

表 5.3 统计了多组开阔环境数据三维位置、速度和姿态误差的均值、均方根与最大值。由表可知，三维位置误差均方根约为 0.023m，三维速度误差均方根小于 0.014m/s，横滚、俯仰和航向姿态误差均方根分别为 0.018deg、0.010deg、0.092deg，这主要是由于航向可观测性弱于横滚和俯仰。紧组合计算结果与参考结果误差小于 POS1100 的标称精度，可以认为紧组合算法与松组合算法在开阔环境下精度相当，可用于后续的计算验证。

表 5.3 连续 GNSS 辅助下紧组合多组导航结果误差统计表

	Position(m)			Velocity(m/s)			Attitude(deg)		
	N	E	D	N	E	D	R	P	H
MEAN	0.009	0.009	0.012	0.005	0.004	0.003	0.011	0.008	0.071
RMS	0.012	0.013	0.015	0.010	0.009	0.004	0.018	0.010	0.092
MAX	0.052	0.063	0.129	0.101	0.076	0.019	0.130	0.075	0.305

图 5.5 给出了连续 GNSS 辅助下状态估计的陀螺仪和加表的零偏、比例因子，由图 5.5 可以看到，在补偿了初始零偏后，零偏估计值保持在较为稳定的水平。垂向陀螺零偏波动大于水平方向，这是由于垂向陀螺零偏可观测性弱于水平方向陀螺零偏，垂向加表零偏波动小于水平方向，这是由于垂向加表零偏可观测性强于水平方向加表零偏。

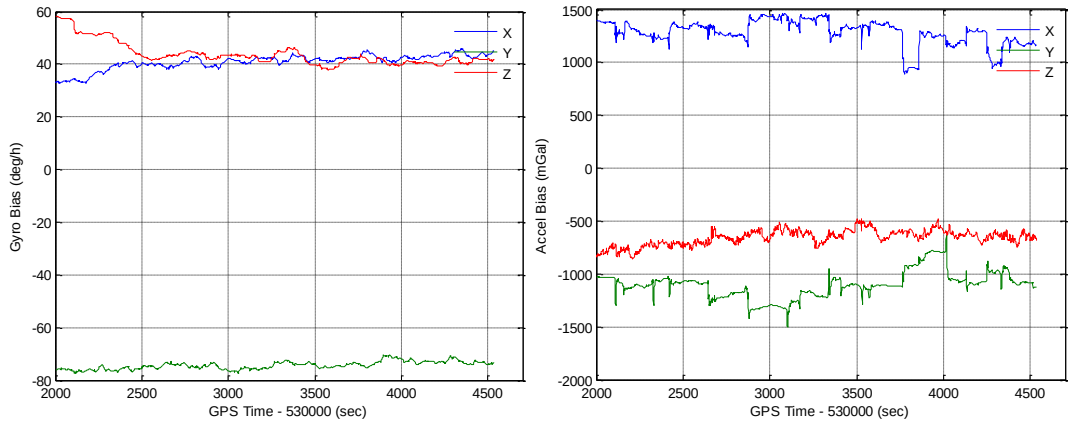


图 5.5 连续 GNSS 辅助下紧组合陀螺（左）与加表（右）零偏图

GNSS RTK/INS 紧组合中，在 GNSS 信号中断时，利用 INS 位置可以得到精度较高的预测伪距及方差，有利于获取更精确的搜索初值，减小搜索空间。随着中断时间的延长，INS 的漂移误差会逐渐变大，其对周跳探测与模糊度固定的辅助效果将会下降，不同中断时长下 INS 的漂移误差可作为其能否发挥辅助作用的决定因素。下面通过仿真 GNSS 信号中断，统计紧组合算法的漂移误差验证导航性能。测试中分别仿真了三组时长分别为 10s、30s、60s 的 GNSS 信号中断，每组 10 个，相邻中断之间保证 3min 以上的恢复时间以使导航误差充分收敛。以位置为例，图 5.6 给出了无车载辅助时 10s、30s、60s GNSS 信号中断期间的漂移误差，表 5.4 给出了对应的漂移误差的 RMS 统计结果。

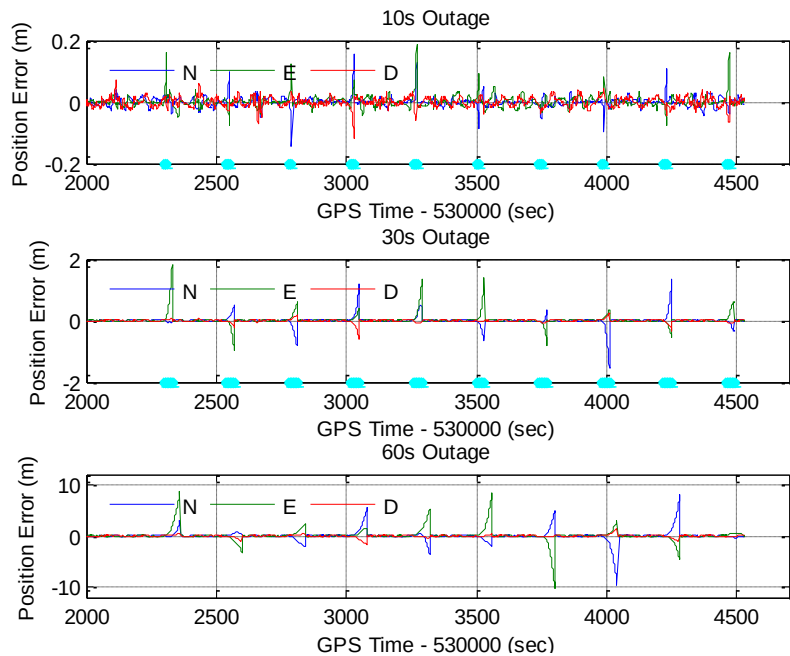


图 5.6 无车载辅助时 10s、30s、60s GNSS 信号中断位置结果误差图

表 5.4 无车载辅助时 10s、30s、60s GNSS 信号中断导航结果误差 RMS 统计表

Outage(s)	Position(m)			Velocity(m/s)			Attitude(deg)		
	N	E	D	N	E	D	R	P	H
10	0.086	0.098	0.052	0.018	0.017	0.007	0.024	0.015	0.072

30	0.800	0.913	0.242	0.059	0.078	0.017	0.043	0.026	0.095
60	4.689	5.450	0.892	0.233	0.240	0.032	0.059	0.049	0.116

模糊度固定率与 GNSS 信号中断后模糊度重收敛时间可以体现紧组合对模糊度固定的辅助作用, 模糊度固定率定义为固定历元数与总历元数之比, 在统计固定历元数时, 均只统计整体模糊度固定成功的历元。模糊度错误固定带来的距离误差一般大于一个载波波长 (0.2m), 且在“固定保持”模式下, 错误的模糊度将引起后续所有历元出现相同误差。本文在仿真 GNSS 信号中断时, 模糊度恢复后均得到正确固定, 因此只讨论模糊度恢复的时间。GNSS 信号中断后模糊度重收敛时间可通过仿真不同时长中断进行统计, 仿真 10s、30s、60s GNSS 信号中断, 分析 NHC、NHC+ODO 辅助对于模糊度重新收敛所需历元数的影响。表 5.5 为无车载辅助时仿真 GNSS 信号中断模糊度恢复时间。

表 5.5 无车载辅助时 GNSS 信号中断模糊度恢复时间

Outage(s)	Outage Number, Ambiguity Resolution Time(s)										MEAN(s)
	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	
10	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	1.3
30	3	2	2	3	2	3	1	3	2	1	2.2
60	4	2	2	4	4	4	6	5	5	1	3.7

由表 5.4 统计结果可以看出漂移误差水平与惯导性能指标相符。从表 5.5 可以看出, 随着中断时间的增加, 模糊度恢复时间逐渐变长, 且随中断时间的增加而增长得更多, 主要是由于中断内位置漂移误差随时间呈非线性增长趋势, 中断时间的延长降低了搜索初值精度, 增大了搜索空间。

5.3.2 开阔环境 NHC 辅助测试

本组实验数据除 GNSS 与 INS 数据外还采集了里程计数据。以 NHC, NHC+ODO 为例验证多源车载辅助信息的效果, 分别统计连续 GNSS 辅助下导航误差与仿真 GNSS 信号中断时的漂移误差结果, 并记录 GNSS 信号中断后模糊度恢复时间。表 5.6 统计了连续 GNSS 辅助下 NHC 辅助导航结果误差。

表 5.6 连续 GNSS 辅助下 NHC 辅助的导航结果误差统计表

	Position(m)			Velocity(m/s)			Attitude(deg)		
	N	E	D	N	E	D	R	P	H
MEAN	0.009	0.009	0.011	0.003	0.003	0.003	0.019	0.014	0.034
RMS	0.012	0.013	0.014	0.004	0.004	0.004	0.027	0.018	0.044
MAX	0.055	0.058	0.085	0.019	0.027	0.021	0.153	0.076	0.154

由表 5.6 可以看到, 相较于 GNSS RTK/INS 紧组合, 在使用 NHC 辅助后, 开

阔环境下整体精度相当，航向姿态精度改善明显，由 0.092deg 提高到 0.044deg。图 5.7 给出了 NHC 辅助下 10s、30s、60s GNSS 信号中断期间的漂移误差，表 5.7 给出了对应的漂移误差的 RMS 统计结果。

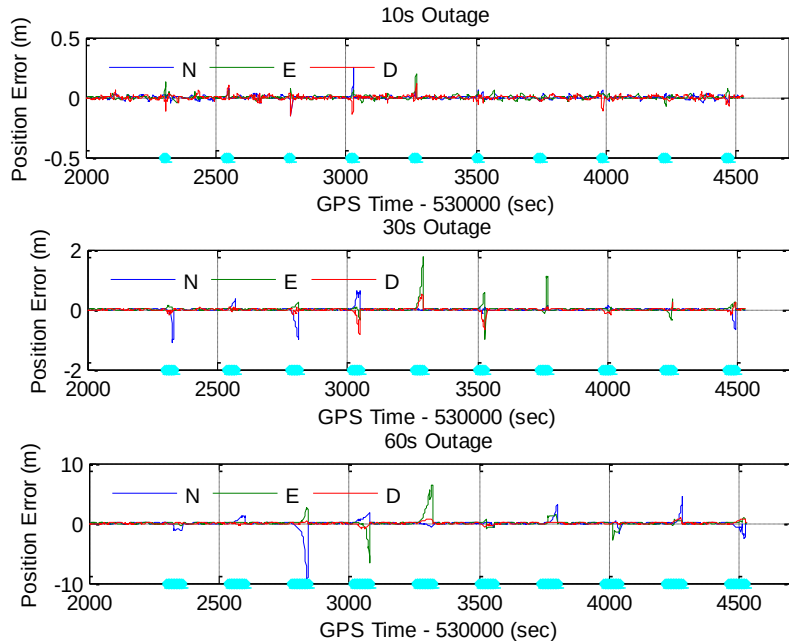


图 5.7 NHC 辅助下 10s、30s、60s GNSS 信号中断位置结果误差图

表 5.7 NHC 辅助下 10s、30s、60s GNSS 信号中断导航结果误差 RMS 统计表

Outage(s)	Position(m)			Velocity(m/s)			Attitude(deg)		
	N	E	D	N	E	D	R	P	H
10	0.081	0.082	0.083	0.018	0.015	0.016	0.033	0.020	0.057
30	0.554	0.708	0.404	0.053	0.063	0.034	0.041	0.028	0.067
60	3.565	3.267	0.594	0.175	0.146	0.042	0.045	0.052	0.083

表 5.8 NHC 辅助下 GNSS 信号中断模糊度恢复时间

Outage(s)	Outage Number, Ambiguity Resolution Time(s)										MEAN(s)
	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	
10	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1.2
30	2	1	2	3	3	2	2	1	1	1	1.8
60	2	2	4	3	3	2	2	2	3	2	2.5

由表 5.7 可知，仿真 GNSS 信号中断时，相较于 GNSS RTK/INS 组合，在使用 NHC 辅助后，导航状态漂移误差显著下降，其中 60s GNSS 信号中断三维位置误差由 7.24m 下降至 4.87m。表 5.8 为 NHC 辅助时 GNSS 信号中断模糊度恢复时间，可以看出，随着中断时间的增加，模糊度重新固定时间逐渐增加。相较于 GNSS RTK/INS，在 NHC 辅助下，GNSS 信号中断后模糊度恢复时间整体上减小，主要是由于 NHC 对 INS 位置漂移起到了约束作用，间接提高了 GNSS 信号恢复时搜索初值的精度，减小了搜索空间。同时模糊度恢复时间不具备随中断时间的增加而增

长更多的趋势,推测原因为 NHC 约束 INS 位置误差漂移使其不再随时间非线性增长。

5.3.3 开阔环境 NHC 与 ODO 辅助测试

下面对连续 GNSS 辅助下 NHC+ODO 辅助的导航误差与仿真 GNSS 信号中断时的漂移误差结果进行统计。表 5.9 统计了连续 GNSS 辅助下 NHC 与 ODO 辅助的导航结果误差统计。

表 5.9 连续 GNSS 辅助下 NHC 与 ODO 辅助的导航结果误差统计表

	Position(m)			Velocity(m/s)			Attitude(deg)		
	N	E	D	N	E	D	R	P	H
MEAN	0.009	0.009	0.011	0.003	0.003	0.003	0.019	0.016	0.024
RMS	0.012	0.013	0.014	0.004	0.005	0.005	0.027	0.021	0.031
MAX	0.055	0.060	0.071	0.021	0.032	0.024	0.154	0.090	0.108

由表 5.9 可以看到,与 NHC 辅助的 GNSS RTK/INS 紧组合相比,加入 ODO 辅助后,开阔环境下整体精度相当。图 5.8 给出了 NHC 与 ODO 辅助下 10s、30s、60s GNSS 信号中断期间的漂移误差,表 5.10 给出了对应的漂移误差的 RMS 统计结果。

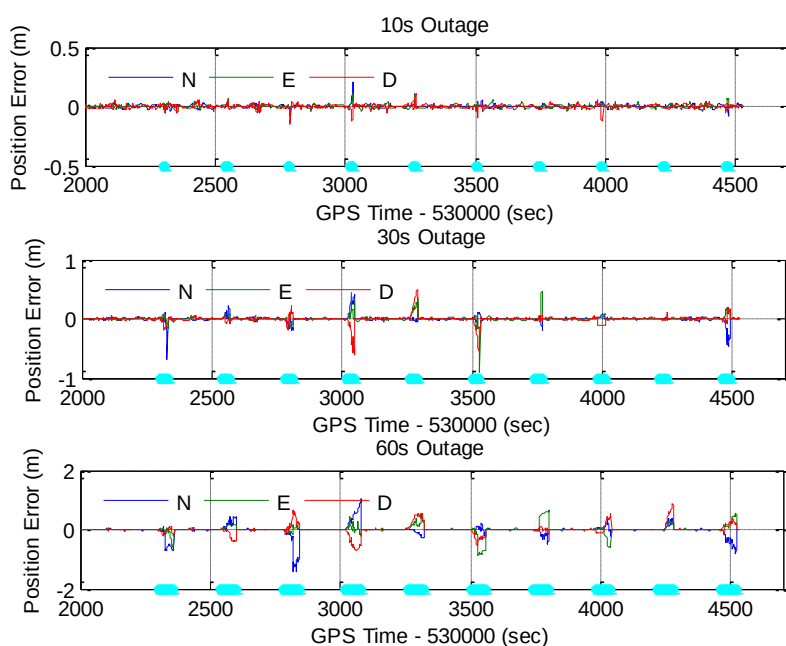


图 5.8 NHC 与 ODO 辅助下 10s、30s、60s GNSS 信号中断位置结果误差图

表 5.10 NHC 与 ODO 辅助下 10s、30s、60s GNSS 信号中断导航结果误差 RMS 统计表

Outage(s)	Position(m)			Velocity(m/s)			Attitude(deg)		
	N	E	D	N	E	D	R	P	H
10	0.059	0.060	0.074	0.015	0.012	0.016	0.032	0.023	0.039
30	0.314	0.373	0.322	0.050	0.056	0.032	0.038	0.031	0.047

60	0.716	0.540	0.540	0.067	0.062	0.043	0.046	0.043	0.065
----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

表 5.11 NHC 与 ODO 辅助下 GNSS 信号中断模糊度恢复时间

Outage(s)	Outage Number, Ambiguity Resolution Time(s)										MEAN(s)
	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	
10	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1.1
30	2	1	1	3	2	3	2	1	1	2	1.6
60	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	2.2

由表 5.10 可知，仿真 GNSS 信号中断时，相较于 NHC 辅助 GNSS RTK/INS 组合，加入 ODO 辅助后导航状态漂移误差显著下降，其中 60s GNSS 信号中断三维位置误差由 4.87m 下降至 1.04m。表 5.11 为 NHC 与 ODO 辅助时 GNSS 信号中断模糊度恢复时间，可以看出，随着中断时间的增加，模糊度重新固定时间逐渐增加。相较于 NHC 辅助的 GNSS RTK/INS，GNSS 信号中断后模糊度恢复时间整体上进一步减小，主要是由于 NHC 与 ODO 对 INS 速度漂移构成了三维约束，改善了搜索初值的精度，减小了搜索空间。模糊度恢复时间不具备随中断时间的增加而增长更多的趋势。不同车载辅助信息下 10s、30s 和 60s GNSS 信号中断模糊度固定恢复时间统计结果可以表示如下。

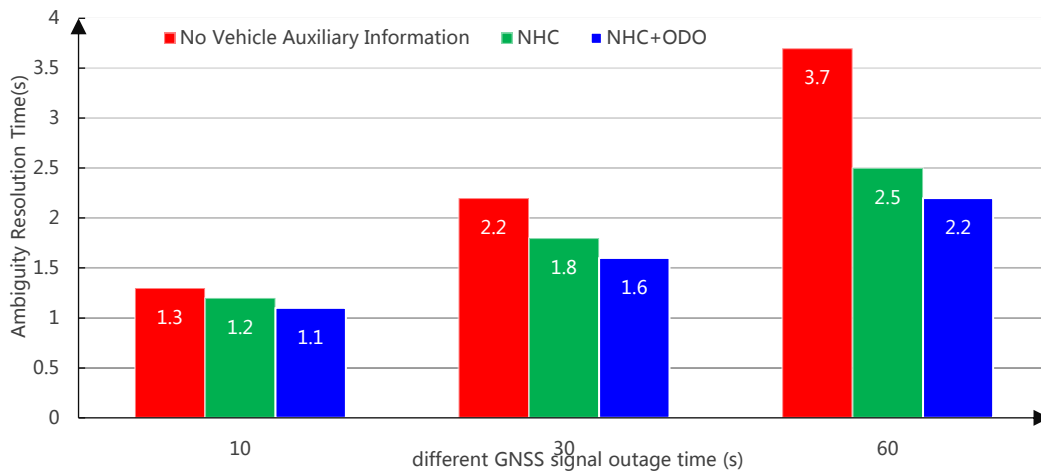


图 5.9 不同车载辅助信息下 10s、30s、60s GNSS 信号中断模糊度固定恢复时间统计

5.3.4 城市环境测试

城市综合环境车载测试路线为武汉市二环线，武汉市二环线路段包含四段隧道、多个音障屏、高架桥遮挡、树荫遮挡、建筑物遮挡、开阔地等典型环境，GNSS 定位结果如图 5.10 所示。测试时长为 4700s，基站位于图中黄色标记点，基线长度、卫星数及 DOP 值如图 5.11 所示，实验设备为中等精度 MEMS IMU M39，性能参数如表 5.12 所示。

表 5.12 M39 性能指标

参数	数值
----	----

陀螺仪	零偏(degree/h)	24
	白噪声(degree/ $\sqrt{h}$)	0.2
	比例因子(ppm)	1000
加表	零偏(mGal)	400
	白噪声(m/s/ $\sqrt{h}$)	0.05
	比例因子(ppm)	1000

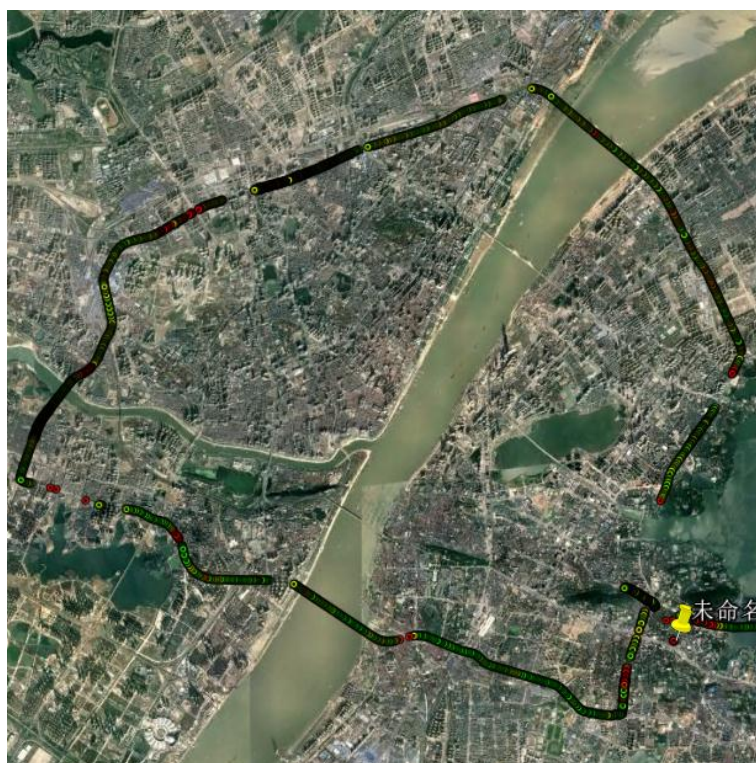


图 5.10 城市综合环境 GNSS 实测轨迹场景

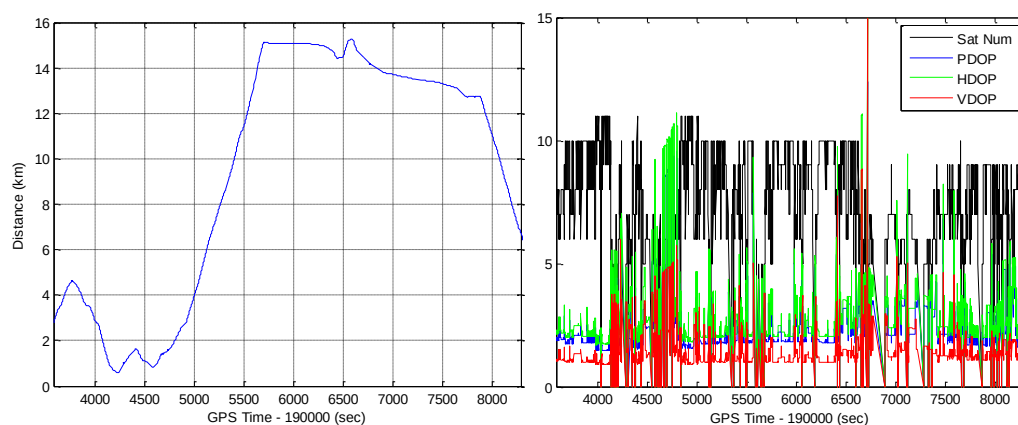


图 5.11 基线长度, 卫星数及 DOP 值

下面对 INS 辅助周跳探测性能、INS 辅助模糊度固定性能和抗差自适应模型改进效果进行分析。

1. INS 辅助周跳探测性能

表 5.13 分别统计了 GNSS 定位和紧组合中使用 GF 和 MW 组合方案探测出卫星的周跳历元数。图 5.12 分别为 GNSS 定位和紧组合中使用 GF 和 MW 组合方案

探测周跳数。

表 5.13 GNSS 与紧组合中 GF 和 MW 组合方案探测周跳数统计表

卫星编号	S2	S5	S13	S15	S18	S20	S21	S24	S29	S37	S40	S41	S45
GNSS	36	175	82	43	112	57	105	136	197	579	25	271	135
紧组合	36	178	81	44	113	57	106	138	202	583	25	268	147

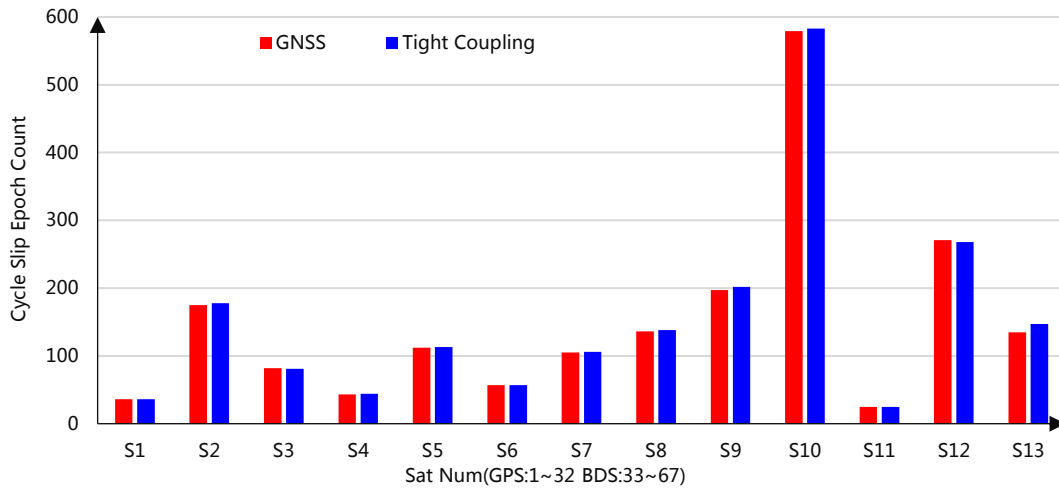


图 5.12 GNSS 与紧组合中 GF 和 MW 组合方案探测周跳数对比

可以看到在使用紧组合之后，GF 和 MW 组合观测值探测出的周跳历元有所增加。这主要是由于紧组合中惯导提供了较为精确的预测位置信息，进而可以预测双差卫地距，其有利于构建更为精确敏感的探测模型。但整体上增加的探测数量不多，主要是由于城市环境中信号中断一般较长，周跳较大，特征明显，双频 GNSS 数据能达到和紧组合相当的探测水平。

2. INS 辅助模糊度固定性能

表 5.14 统计了全时段 (SOW=193580s~198300s, 约 4720s) 模糊度固定情况，GNSS 定位整秒输出历元数为 4322 (统计时将未输出历元作为无 GNSS 结果)，紧组合定位整秒输出历元数为 4711。统计结果显示 GNSS 定位和紧组合中超过设定阈值的 Ratio 值分别为 55.11%，50.18%，考虑到隧道、隔音棚等区域信号遮挡和干扰严重，常规紧组合算法未做抗差处理，在卫星少于四颗时仍维持解算易引入粗差，因此紧组合模糊度固定解略低于 GNSS。图 5.13 分别为使用 GNSS 定位和紧组合时 Ratio 值的变化曲线 (Ratio 值反映了次优解与最优解的差异，一般情况下差异越大越好，阈值一般设置为 3)。

表 5.14 全时段模糊度固定统计表

	统计历元数	Ratio>Threshold	无 GNSS 占比	固定解占比	浮点解占比
GNSS	4720	55.11%	9.25%	54.19%	36.78%
紧组合	4711	50.18%	3.25%	49.40%	47.36%

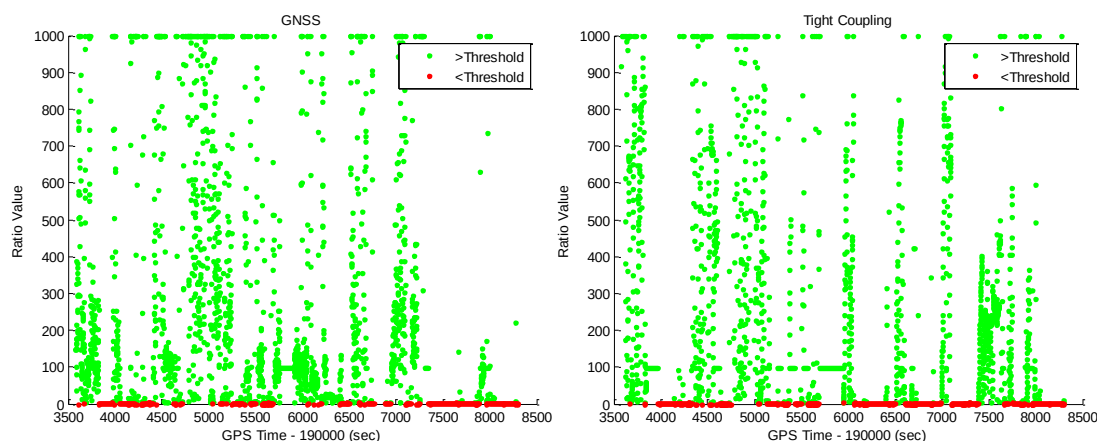


图 5.13 全时段 GNSS 定位和紧组合中 Ratio 值变化情况

由图 5.13 可以看到，前半段由于 GNSS 信号频繁出现短时间的失锁，紧组合收敛不充分，使得紧组合难以获得较大的 Ratio 值，后半段 GNSS 长时间进入隧道时段后的短期时间与出隧道后的短期时间内，相较于 GNSS，紧组合可以提供精度较高的 INS 预测信息，因此可以获得较大的 Ratio 值。图 5.14 分别为使用 GNSS 定位和紧组合时全时段模糊度固定情况的变化曲线，统计结果中，GNSS 模式下，无 GNSS，固定解，浮点解占比分别为 9.25%、54.19%和 36.78%，紧组合模式下，无 GNSS，固定解，浮点解占比分别为 3.25%、49.40%和 47.36%。可以看到紧组合模式受信号遮挡与干扰影响更为明显，浮点解占比高于 GNSS 模式，且超过固定解降低的比例，同时紧组合模式下无 GNSS 占比低于 GNSS 模式，这主要是由于紧组合在少于四颗卫星时仍可维持解算。

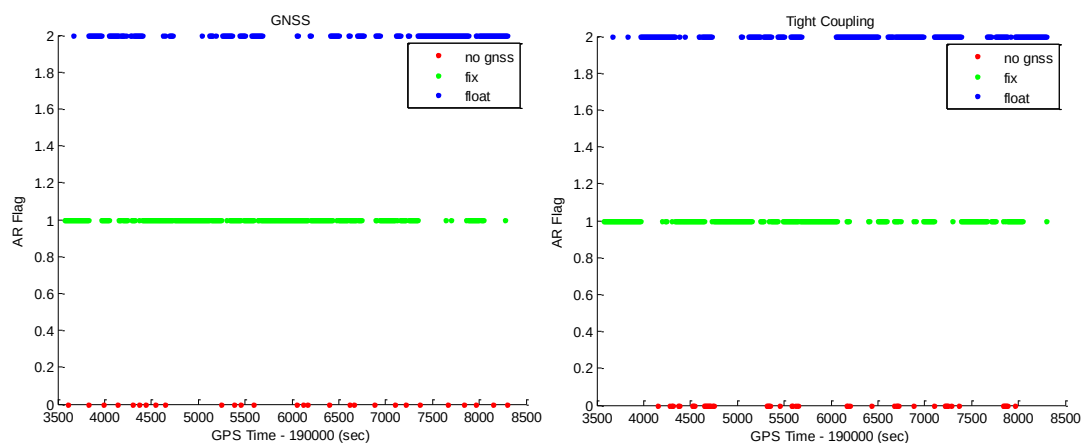


图 5.14 全时段 GNSS 定位和紧组合中模糊度固定情况

考虑到隧道、隔音棚、天桥等信号遮挡和干扰影响，同时对 GNSS 与紧组合结果去除信号严重遮挡和干扰时段进行统计，最终统计时段如表 5.15 所示，

表 5.15 去除信号严重遮挡和干扰后统计时段

时段编号	起始	终止
1	193580	194030
2	194340	194620
3	194820	195120
4	195400	195550

5	195950	196050
6	196210	196600
7	196920	197100
8	197315	197745
9	197900	198010
总计	约 2400s	

结果如表 5.16 所示, GNSS 定位整秒输出历元数为 2375, 紧组合定位整秒输出历元数为 2388。统计结果显示 GNSS 定位和紧组合时超过设定阈值的 Ratio 值分别为 66.98%, 72.91%。图 5.15 分别为使用 GNSS 定位和紧组合时 Ratio 值的变化曲线。

表 5.16 去除信号严重遮挡和干扰时段后模糊度固定统计表

	统计历元数	Ratio>Threshold	无 GNSS 占比	固定解占比	浮点解占比
GNSS	2375	66.98%	0.51%	66.53%	32.97%
紧组合	2388	72.91%	0.50%	72.53%	26.96%

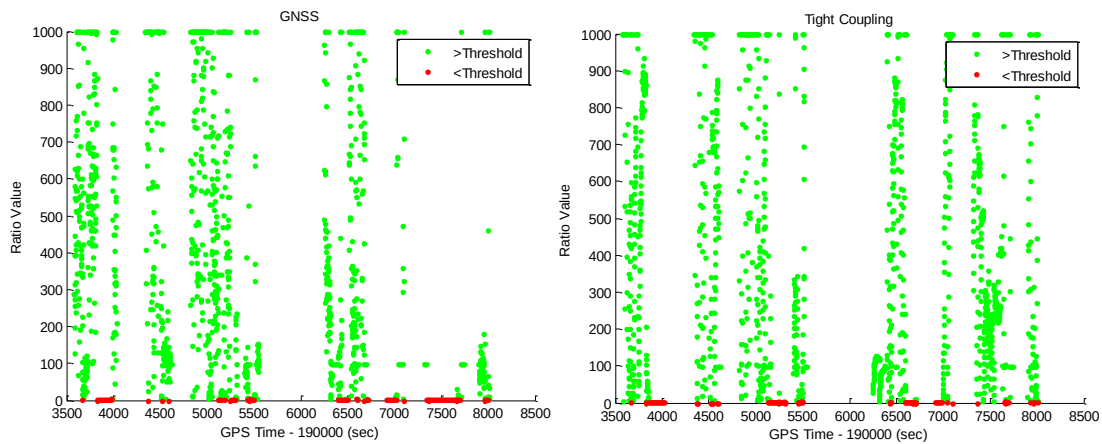


图 5.15 去除信号遮挡时段后 GNSS 定位和紧组合中 Ratio 值变化情况

由统计结果可知, 在同时去除隧道、隔音棚、天桥等信号遮挡时段后, 相比于统计全时段结果, GNSS 与紧组合固定解占比都有提高, 且紧组合固定解占比显著高于 GNSS, 表明在无长时间严重信号遮挡的常规城市环境中, 相较于 GNSS 定位, GNSS RTK/INS 紧组合对于模糊度固定的具有较好的辅助作用。由表 5.16 可以观察到在去除信号严重遮挡时段后, 两者无 GNSS 占比相当, 紧组合相较于 GNSS 在固定解占比超出的部分接近浮点解占比降低的比例, 表明 INS 的先验信息在 GNSS 模糊度搜索与固定中发挥了重要作用。图 5.16 分别为使用 GNSS 定位和紧组合时模糊度固定的变化曲线, 统计结果中, GNSS 模式下, 无 GNSS, 固定解, 浮点解占比分别为 0.51%、66.53%和 32.97%, 紧组合模式下, 无 GNSS, 固定解, 浮点解占比分别为 0.50%、72.53%和 26.96%。

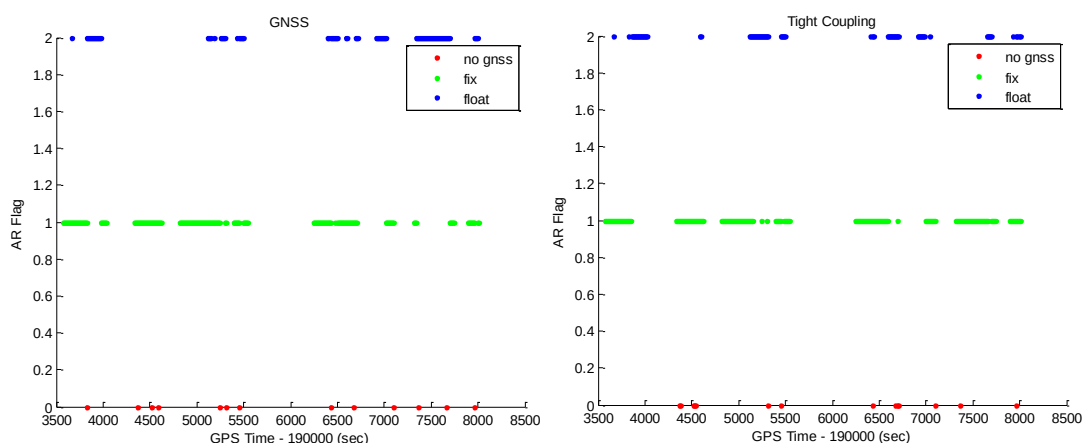


图 5.16 去除信号严重遮挡和干扰时段后 GNSS 定位和紧组合中模糊度固定情况

3. 抗差自适应模型改进效果

利用抗差自适应模型改进的紧组合算法（以下称 RA 紧组合）对同组城市环境数据进行处理，将紧组合结果与 RA 紧组合结果进行对比，下表为全时段模糊度固定统计结果，

表 5.17 全时段模糊度固定统计表

	统计历元数	Ratio>Threshold	无 GNSS 占比	固定解占比	浮点解占比
紧组合	4711	50.18%	3.25%	49.40%	47.36%
RA 紧组合	4711	54.68%	3.31%	53.94%	42.75%

可以看到，加入抗差自适应模型改进后，相较于普通紧组合，固定解比例有所提高，主要是由于在城市环境中，GNSS 受到信号遮挡时段频繁，抗差自适应模型能通过粗差表现对系统噪声和观测噪声权重进行一定程度的调节。在较长的信号中断期间，导航误差主要受起始误差与惯导的漂移误差影响，其对紧组合与抗差自适应模型改进的紧组合的影响相当，两者的差异主要体现在弱 GNSS 信号以及短期 GNSS 信号中断等时段，下面对紧组合结果与 RA 紧组合结果去除信号遮挡时段后统计模糊度固定情况，统计结果如表 5.16 所示，

表 5.18 去除信号严重遮挡和干扰时段后模糊度固定统计表

	统计历元数	Ratio>Threshold	无 GNSS 占比	固定解占比	浮点解占比
紧组合	2388	72.91%	0.50%	72.53%	26.96%
RA 紧组合	2389	81.75%	0.54%	81.49%	17.95%

从表 5.18 可以看出，在去除信号遮挡时段后，与全时段统计结果相比，紧组合与 RA 紧组合模糊度固定占比都有显著提高，相较于普通紧组合，RA 紧组合可以获得更高的模糊度固定解比例，模糊度固定率增加了 8.96%，即抗差自适应模型改进对于紧组合模糊度固定起到了积极的辅助作用。下面对紧组合与 RA 紧组合导航结果进行误差统计，

表 5.19 去除信号严重遮挡和干扰时段后紧组合导航结果误差统计表

	Position(m)			Velocity(m/s)			Attitude(deg)		
	N	E	D	N	E	D	R	P	H
MEAN	0.455	0.287	0.723	0.140	0.117	0.135	0.309	0.225	1.175

RMS	0.561	0.341	0.900	0.157	0.165	0.188	0.409	0.271	1.475
MAX	1.164	0.700	1.504	0.239	0.373	0.440	0.868	0.457	2.598

表 5.20 去除信号严重遮挡和干扰时段后 RA 紧组合导航结果误差统计表

	Position(m)			Velocity(m/s)			Attitude(deg)		
	N	E	D	N	E	D	R	P	H
MEAN	0.451	0.385	0.945	0.144	0.124	0.146	0.269	0.223	1.156
RMS	0.581	0.436	1.163	0.163	0.169	0.192	0.368	0.275	1.426
MAX	1.256	0.700	1.993	0.260	0.373	0.437	0.841	0.566	2.473

由表可知，使用抗差自适应模型改进后，紧组合算法中三维位置误差由 1.37m 减小到 1.11m，精度改善比例为 18.98%。算法对高程精度改进较为显著，主要是由于紧组合定位中，高程主要依赖重力模型计算，其受观测质量影响较大，抗差自适应模型可以减少 GNSS 观测质量下降带来的高程精度损失，算法对姿态无太大改进效果，主要是由于抗差自适应模型主要影响位置精度。

5.4 本章小结

本章主要内容为相关的实验与分析。首先描述了相关实验设备与参数，然后阐述了分析评估 RTK/INS 紧组合性能的方法，并据此分析了算法在开阔环境下的基本性能、车载辅助信息对导航精度与模糊度固定的作用，验证了算法在城市环境下的关键性能。

总 结

本文研究了带有车载辅助信息的 GNSS RTK/INS 紧组合算法,在此基础上深入研究了 INS 辅助周跳探测、INS 辅助模糊度重新固定、车载辅助信息的作用、抗差与自适应滤波的作用。最后用实测的开阔环境数据与城市综合环境数据对算法基本性能和关键性能进行了验证与分析。论文的主要工作如下:

1. 设计并实现了一套 GNSS RTK/INS 紧组合导航算法,分析了载波相位相对定位误差来源,对常用的周跳探测与模糊度解算方法及原理进行了描述。开阔环境测试结果与仿真中断结果表明,其在 GNSS 信号条件良好时与松组合结果精度相当。
2. 实现了 INS 辅助下利用 GF 组合与 MW 组合观测值辅助周跳探测和处理的方法。引出了利用集中式滤波实现 INS 辅助模糊度固定的方法,即将模糊度参数进行状态扩维估计。从理论上推导验证了 INS 对于模糊度固定的作用,利用模糊度精度衰减因子(ADOP)与模糊度解算精度改善比率两个参数,分析了惯导对于模糊度固定的辅助作用,结果表明惯导可以有效改善辅助周跳探测与模糊度固定效果,且惯导位置精度越高,辅助效果越好。
3. 分析了车载辅助信息在 GNSS RTK/INS 紧组合算法中的作用。车载辅助信息包括零速修正、零速姿态锁定、非完整性约束、里程计辅助、双天线航向等。以非完整性约束和里程计辅助为例,分析了多源车载辅助信息在紧组合中的作用。实验结果表明,充分利用车载辅助信息可以有效改善紧组合的导航精度,连续 GNSS 辅助情况下非完整性约束对航向精度改善较大,GNSS 信号中断时,里程计辅助可以在非完整性约束的基础上进一步改善导航精度,同时合理利用车载辅助信息减小了 GNSS 信号中断时惯导的位置漂移误差,进而增强了对模糊度固定的辅助效果,在 GNSS 信号中断后可以加快模糊度恢复时间。
4. 利用抗差和自适应滤波改进了紧组合算法,抗差模型利用新息构造 IGG III 权函数,通过抗差因子调节观测噪声的权重。自适应滤波利用 Sage-Husa 估计方法进行函数模型和随机模型的自适应调节。城市环境测试表明,改进的抗差自适应模型提高了紧组合算法的可用性和可靠性,一定程度上改善了导航精度。

上述研究结果表明:基于 GNSS RTK/INS 的紧组合算法可以获取高精度的定位结果,利用 INS 的特性可以辅助周跳探测与模糊度固定,利用车载辅助信息可以改善导航精度,利用抗差自适应模型可以提高系统的鲁棒性。

但是本文算法无法应对长时间的 GNSS 信号中断,同时由于 GNSS 粗差特性的不确定性,算法难以探测出所有粗差。因此,需要开展后续研究工作如下:

1. 利用多系统多频 GNSS 进行 RTK 紧组合算法研究，并进行不同 GNSS 算法（如 PPP、RTK、DGNSS、SPP 等）的自主切换，改进系统的稳定性、可用性和精度。对低精度惯导进行测试，分析紧组合应用的精度极限。
2. 研究在长基线或网络 RTK 场景下的紧组合应用。
3. 研究相机、激光雷达等影像传感器数据与 GNSS RTK/INS 数据的融合，发挥互补特性，应对长时间 GNSS 信号中断场景。

参考文献

- 程亚豪. 2013. 伪距差分北斗/惯导紧组合算法实现与 GNSS 数据质量控制研究[D]:[硕士]. 武汉: 武汉大学.
- 高钟毓, 王进, 董景新, 等. 1995. 惯性测量系统零速修正的几种估计方法[J]. 中国惯性技术学报, (2):24-29.
- 高周正. 2016. 多模 GNSS PPP/INS 组合系统算法与应用研究[D]:[博士]. 武汉: 武汉大学.
- 韩厚增. 2017. 惯导辅助 BDS/GPS 高精度动态定位模型研究[D]:[博士]. 徐州: 中国矿业大学.
- 何海波. 2002. 高精度 GPS 动态测量及质量控制[D]:[博士]. 郑州: 信息工程大学.
- 李淑慧, 刘经南. 2003. 整周模糊度搜索方法的效率比较和分析[J]. 测绘通报, (10).
- 李团. 2016. GPS/BDS 双模 RTK/INS 紧组合算法研究及软件实现[D]:[硕士]. 武汉: 武汉大学.
- 李征航, 黄劲松. 2010. GPS 测量与数据处理[M]. 第二版. 武汉: 武汉大学出版社.
- 李征航, 张小红. 2009. 卫星导航定位新技术及高精度数据处理方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社.
- 刘川川. 2012. 基于伪距/多普勒的 GPS/INS 紧组合算法实现与抗差性能研究[D]:[硕士]. 武汉: 武汉大学.
- 刘帅. 2016. 模糊度固定解 PPP/INS 紧组合理论与方法[D]:[硕士]. 郑州: 解放军信息工程大学.
- 牛小骥, 班亚龙, 张提升, 等. 2016. GNSS/INS 深组合技术研究进展与展望[J]. 航空学报, 37(10):2895-2908.
- 秦永元. 2014. 惯性导航[M]. 第二版. 北京: 科学出版社.
- 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 2015. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 第三版. 西安: 西北工业大学出版社.
- 孙红星. 2004. 差分 GPS/INS 组合定位定姿及其在 MMS 中的应用[D]:[博士]. 武汉: 武汉大学.
- 王贵文, 王泽民, 殷海涛, 等. 2007. GNSS 整周模糊度概率特性[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 26(4).
- 吴富梅. 2010. GNSS/INS 组合导航误差补偿与自适应滤波理论的拓展[D]:[博士]. 郑州: 解放军信息工程大学.
- 吴云. 2015. 最优估计与假设检验理论及其在 GNSS 中的应用[M]. 北京: 科学出版社.
- 谢刚. 2009. GPS 原理与接收机设计[M]. 北京: 电子工业出版社.

- 谢宏飞. 2013. INS 辅助 GPS 模糊度快速恢复与周跳探测技术研究[D]:硕士. 郑州: 中国人民解放军信息工程大学.
- 严恭敏. 2006. 车载自主定位定向系统研究[D]:[博士]. 西安: 西北工业大学.
- 杨元喜. 2006. 自适应动态导航定位[M]. 北京: 测绘出版社.
- 袁洪, 万卫星, 宁百齐, 等. 1998. 基于三差解检测与修复 GPS 载波相位周跳新方法[J]. 测绘学报, (3).
- 张天光, 王秀萍, 王丽霞, 等. 2007. 捷联惯性导航技术[M]. 北京: 国防工业出版社.
- Benson D O. 1975. A comparison of two approaches to pure-inertial and Doppler-inertial error analysis[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, (4): 447-455.
- Blewitt G. An automatic editing algorithm for GPS data[J]. Geophysical Research Letters, 1990, 17(3): 199-202.
- KR Britting. 1971. Inertial Navigation Systems Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons.
- Chatfield A B C. 1997. Fundamentals of high accuracy inertial navigation[M]. Reston, VA: Progress in Astronautics and Aeronautics.
- Chen D. 1997. Development of a fast ambiguity search filtering (FASF) method for GPS carrier phase ambiguity resolution[D]:[Doctor]. Calgary: University of Calgary.
- Chen D, Lachapelle G. 1995. A Comparison of the FASF and Least - Squares Search Algorithms for on - the - Fly Ambiguity Resolution[J]. Navigation, 42(2): 371-390.
- Counselman C C, Gourevitch S A. 1981. Miniature interferometer terminals for earth surveying: ambiguity and multipath with Global Positioning System[J]. Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on, (4): 244-252.
- Deng C, Tang W, Liu J, et al. 2013. Reliable single-epoch ambiguity resolution for short baselines using combined GPS/BeiDou system[J]. GPS Solutions, 18(3): 375-386.
- El-Sheimy N , Hou H , Niu X . 2008. Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 57(1):140-149.
- Farrell J, Barth M. 1999. The global positioning system and inertial navigation[M]. New York: Mc Graw Hill.
- Frei E. 1991. GPS-Fast Ambiguity Resolution Approach “FARA”: theory and application[C]. XX General Assembly of the IUGG, IAG-Symposium GM 1/4, Vienna, August, 11-24.
- Goad C. 1986. Precise positioning with the global positioning system[C]. Proceedings of

- the Third International Symposium on Inertial Technology for Surveying and Geodesy, 745-756.
- Grewal M S, Andrews A P. 2008. Kalman filtering: Theory and Practice Using MATLAB[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons
- Groves P D. 2013. Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems[M]. Boston: Artech house.
- Han S. 1997. Carrier phase-based long-range GPS kinematic positioning[D]. Sydney: University of New South Wales.
- Han H, Wang J, Wang J, et al. 2015. Performance Analysis on Carrier Phase-Based Tightly-Coupled GPS/BDS/INS Integration in GNSS Degraded and Denied Environments[J]. Sensors, 15(4): 8685-8711.
- Hatch R. 1983. The synergism of GPS code and carrier measurements[C]. International geodetic symposium on satellite doppler positioning, 1213-1231.
- Hatch R. 1991. Ambiguity resolution while moving-experimental results[C]. Proceedings of ION GPS, 10-13.
- Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Wasle E. 2007. GNSS—global navigation satellite systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media.
- Iii C C C , Abbot R I . 1989. Method of resolving radio phase ambiguity in satellite orbit determination[J]. Journal of Geophysical Research Solid Earth, 94(B6).
- Kaplan E, Hegarty C. 2005. Understanding GPS: principles and applications[M]. Boston: Artech house.
- Kennedy S , Hamilton J , Martell H . 2006. Architecture and System Performance of SPAN -NovAtel's GPS/INS Solution[C]// Position, Location, & Navigation Symposium, IEEE/ION. IEEE.
- Lee H-K, Wang J, Rizos C. 2003. Effective cycle slip detection and identification for high precision GPS/INS integrated systems[J]. The Journal of Navigation, 56(03): 475-486.
- Lipp A, Gu X . 1994. Cycle-slip detection and repair in integrated navigation systems[C]// Position Location & Navigation Symposium. IEEE.
- Liu Z . 2011. A new automated cycle slip detection and repair method for a single dual-frequency GPS receiver[J]. Journal of Geodesy, 85(3):171-183.
- Misra P, Enge P. 2006. Global Positioning System: Signals, Measurements and Performance[M]. 2nd ed. Lincoln, MA: Ganga-Jamuna Press.
- Niu X , Nassar S , El-Sheimy N . 2007. An Accurate Land-Vehicle MEMS IMU/GPS

- Navigation System Using 3D Auxiliary Velocity Updates[J]. Navigation, 54(3):177-188.
- Noureldin, Aboelmagd, Karamat, et al. 2013. Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration[M]. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Park M. 2004. Error analysis and stochastic modeling of MEMS based inertial sensors for land vehicle navigation applications[D]:[Doctor]. Calgary: University of Calgary.
- Parkinson B W . 1996. Global Positioning System : Theory and Applications Volume I[J]. Reston, VA: AIAA.
- Petovello M, Cannon M, Lachapelle G. 2003. Quantifying Improvements from the Integration of GPS and a Tactical Grade INS in High Accuracy Navigation Applications[C]. Proceedings of ION NTM, 22-24.
- Sage A P, Husa G W. 1969. Algorithms for sequential adaptive estimation of prior statistics[C]// Adaptive Processes.
- Scherzinger B M. 2000. Precise robust positioning with inertial/GPS RTK[C]. Proceedings of IONGPS-2000.
- Scherzinger B M. 2002. Robust Positioning with Single Frequency Inertially Aided RTK[C]. Proceedings of ION NTM, 911-917.
- Shin E-H. 2005. Estimation techniques for low-cost inertial navigation[D]:[Doctor]. UCGE report, Calgary: University of Calgary.
- Teunissen P J G. 1995. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation[J]. Journal of Geodesy, 70(1-2): 65-82.
- Teunissen,P.J.G. 1997. A canonical theory for short GPS baselines[J]. Journal of Geodesy, Vol.71. Part I: the baseline precision, No.6, pp.320-336. Part II: the ambiguity precision and correlation, No.7, pp.389-401. Part III: the geometry of the ambiguity search space, No.8, pp.486-501. Part IV: precision versus reliability, No.9, pp.513-525.
- Teunissen P. 2000. The success rate and precision of GPS ambiguities[J]. Journal of Geodesy, 74(3-4): 321-326.
- Titterton D, Weston J L. 2004. Strapdown inertial navigation technology[M]. 2nd ed. London: IET.
- Tuan L , Hongping Z , Xiaoji N , et al. 2017. Tightly-Coupled Integration of Multi-GNSS Single-Frequency RTK and MEMS-IMU for Enhanced Positioning Performance[J]. Sensors, 17(11):2462-.
- Wu H. 2003. On-the-fly GPS ambiguity resolution with inertial aiding[D]:[Doctor]. Calgary: University of Calgary, Department of Geomatics Engineering.

- Yang Y, Li J, Xu J, et al. 2011. Contribution of the Compass satellite navigation system to global PNT users[J]. Chinese Science Bulletin, 56(26): 2813-2819.
- Zhang H T. Performance Comparison of Kinematic GPS Integrated with Different Tactical Grade IMUs[D]. Calgary: University of Calgary, 2006.

致谢

值此论文付梓之际，我要对周围给予支持、帮助和鼓励的老师、同学、亲人、朋友道一声感谢。

感谢我的硕士导师，牛小骥老师。牛老师高尚稳重的人格、平易近人的态度、求真务实的作风、因材施教的理念令人钦佩敬仰。师者，所以传道授业解惑也。牛老师正是其中的典范。他不仅仅教授我们专业知识，指导我们的研究方向，同时也认真地通过自己的亲身经验指点我们避开陷阱，为我们拨开疑云。他总是积极寻找机会让每位同学都可以接触到科学研究的前沿信息，可以参与实际的科研项目，处处为同学们着想。在繁忙的工作之余，牛老师仍然密切关注与专业相关的新兴研究方向的进展。仰之弥高，钻之弥坚。牛老师的工作、生活和学习态度值得我们深深领悟体会。感谢为我们教授研究生课程的各位老师，你们的勤劳工作丰富了我们的学识，开拓了我们的眼界。感谢综合办公室的各位老师，你们为我们积极解决疑惑、组织活动，为我们的工作、学习和生活铺平了道路，是我们的坚强壁垒。

感谢我的本科导师，张小红老师。张老师治学态度严谨细致、待人亲切友好，以身作则，学为人师，行为世范。他认真教授我们数门课程，积极组织我们的学习实践活动，时常关心我们的生活，参与我们的班级活动。为了导航工程专业的建设发展，测绘学院多位老师付出了巨大心血，为专业编撰了讲义教材，认真为班级同学教授课程。感谢辅导员张婧老师，张老师热情开朗，经常组织班级体之间的体育文娱活动，丰富我们的生活。

感谢 GNSS/INS GROUP 大家庭的各位成员，感谢章红平老师，感谢郭文飞、张提升老师，你们对待学术的严谨、对待工作认真负责的态度、对待学生耐心的指导值得我们学习。感谢张全师兄，张全师兄总是认真地为我审阅论文、指点我科研的方法、传授丰富的项目经验。感谢陈起金、束远明、李团、旷俭等师兄，你们总是为我们悉心解答科研工作中的问题，提出切实可行的方案。感谢金荣河、常乐、蔡磊、王强、李青丽、李珊珊等师兄师姐，他们总是尽力解答我的疑惑，提供力所能及的帮助。感谢同期入组的谭俊雄、程风、周禹昆、苏景岚、祁发瑞、李卓、陈映秋、李雨等同学，感谢你们三年来在学业和生活上的帮助。感谢科研助理黄凤寒的辛勤工作与后勤支持。

感谢 GNSS 中心 2016 级硕士班的各位同学，很高兴与你们共同度过充实的硕士阶段，我们共同成长，一起进步。

感谢我的室友谷明泽、祁发瑞和万鹏，感谢你们在生活上的陪伴，与你们的交流讨论总能让我有所启发。

感谢父母和姐姐一直以来的关心照顾，你们给了我坚定的意志和前进的动力。

AD ASTRA. (奔向星辰，永怀探索求真之心)