

惯性导航原理与组合导航课程讲义

Part 5 - 惯性导航速度和位置算法

牛小骥、陈起金* 编

武汉大学卫星导航定位技术研究中心

2021 年 5 月



目 录

1	符号定义	1
2	速度算法	1
2.1	速度微分方程	2
2.1.1	i 系速度微分方程	2
2.1.2	e 系速度微分方程	3
2.1.3	n 系速度微分方程	3
2.2	n 系下的速度更新	3
2.2.1	重力/哥氏积分项	4
2.2.2	比力积分项	5
2.2.3	b 系比力积分项	6
2.2.4	双子样速度更新算法整理	8
3	位置更新算法	9

引言

我们用三维向量来表示载体在三维空间中的位置、速度、加速度等运动参数，用位置和速度的微分方程来表示其随时间的变化规律，例如速度微分方程描述了速度的时间变化率与比力和速度本身的函数关系。那么，通过求解速度的连续时间微分方程并做离散化处理，可得到速度的递推计算式。这一求解过程和离散化处理必然会带来误差，一般的原则是保证算法引起的误差不超过惯性传感器引起误差的 5%，这是判断算法设计是否合理的一个基本准则。

对向量求导需指定相应的坐标系，也即“在哪个坐标系下观察这个向量随时间的变化”。对于速度向量，我们可以选择在不同的坐标系下进行求导，包括地球坐标系、导航坐标系和惯性坐标系。具体选择哪个坐标系完全取决于应用需求。虽然各坐标系不存在孰优孰劣的问题，但针对实际应用，选择合适的坐标系可以使得工作变得更方便。例如，对于地球附近的导航应用，一般较少选用惯性坐标系来进行速度的解算。我们在讲义中选择在导航坐标系下求解速度微分方程，而对于熟悉 GNSS 精密定位的工程师来说，则可能更倾向于选择地球坐标系。

在本讲义中，我们大部分精力集中于速度微分方程的推导及其数值解法，导出了不同坐标系下的速度微分方程，并以导航坐标系为例推导了速度更新的递推计算式。最后以较少的篇幅介绍了位置更新算法，这并不是说位置更新不重要，而是因为相应的位置更新算法较为简单明了。在阅读本讲义的时候，要特别注意理解以下几个要点：1) 区分三维向量与向量的坐标，理解用向量描述位置、速度和加速度等导航参数时其上下角标的物理含义，尤其是理解求导所涉及的坐标系。2) 在推导速度微分方程时反复用到向量导数的哥氏方程，要准确理解其物理含义。3) 求解速度微分方程时，尤其是处理时变向量的积分项过程中，我们做了一系列的合理假设，这些假设会带来一定的误差，但是远小于传感器误差所带来的导航误差。4) 理解速度更新方程中的“划桨效应”改正项。

1 符号定义

在惯性导航中，载体的线运动和角运动都是相对于另一个坐标系而言的。我们可以用三维向量来表示诸如位置、速度、加速度和角速度等运动学参数。准确地描述这些运动参数往往涉及三个坐标系，而描述他们对时间的导数时则需额外再引入一个坐标系。因此，必须先明确定义相关的坐标系，否则在理解向量的实际物理含义时会造成一些潜在的混乱。

对于任意三维向量 \mathbf{p} 及其导数，主要涉及如下四个坐标系

$$\mathbf{p}_{AB}^C, \quad {}^D\dot{\mathbf{p}}_{AB}^C$$

- B = 载体坐标系，用于描述载体的运动
- A = 参考坐标系，运动所参照的坐标系
- C = 投影坐标系，指定投影坐标系后，可以写出向量在该坐标系下的坐标值
- D = 求导坐标系，即在该坐标系下观察向量的随时间的变化

接下来，我们结合惯性导航速度和位置算法中涉及的向量进行举例说明。

$\mathbf{r}_{eb} \equiv$ 从 e 系原点指向 b 系原点的位置向量

$\mathbf{v}_{eb} \equiv$ b 系原点 (载体) 相对于 e 系的速度向量

$\mathbf{v}_{eb}^n \equiv (\mathbf{v}_{eb})^n \equiv$ 速度向量 \mathbf{v}_{eb} 在 n 系下的投影，即坐标值

${}^i\dot{\mathbf{r}}_{eb} \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}_{eb}}{dt} \right|_i \equiv$ 在 i 系下对位置向量 \mathbf{r}_{eb} 求导，即站在 i 系的角度观察 \mathbf{r}_{eb} 随时间的变化率

${}^i\dot{\mathbf{r}}_{eb}^n \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}_{eb}^n}{dt} \right|_i \equiv$ 导数 ${}^i\dot{\mathbf{r}}_{eb}$ 在 n 系下的投影，即坐标值

式中 b, e, n, i 分别表示载体坐标系、地心地固坐标系、导航坐标系和惯性坐标系。

2 速度算法

对于地球附近的导航应用，我们关心的速度是载体相对于地球的线速度（通常称作地速），即载体坐标系原点相对于地心的位置向量 \mathbf{r}_{eb} 在地球坐标系中的时间变化率，用向量 \mathbf{v}_{eb} 来表示，记作

$$\mathbf{v}_{eb} \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}_{eb}}{dt} \right|_e \quad (1)$$

式中 \mathbf{r}_{eb} 表示位置向量¹，其起点为地球中心，终点为载体中心。在本讲义中，我们关心地球附近的导航，后面所说的速度特指地速 \mathbf{v}_{eb} ，为书写方便，在不引起歧义的情况下将省略 \mathbf{v}_{eb} 和 \mathbf{r}_{eb} 的下标，直接写成 \mathbf{v} 和 \mathbf{r} 。

¹注意，不要混淆向量和向量的坐标这两个概念，位置向量是客观存在的矢量，而谈到位置坐标则必须指定坐标系。例如，我们可以在地球坐标系下用大地坐标（纬度、经度和高程）或者在地心地固笛卡尔坐标系下用 X、Y、Z 三个坐标值来描述载体的位置。当然，也可以将位置向量分解到导航坐标系（ n 系）的北、东、地方向，但是在 n 系下表示这么长的一个向量，不太方便。因此我们一般选择在 n 系下表示位置误差向量而不是位置向量本身。

根据牛顿运动定律，载体的绝对加速度 \mathbf{a} （或全加速度）是惯性坐标系（ i 系）下载体位置向量对时间的二次导数

$$\mathbf{a} \equiv \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i \quad (2)$$

根据加速度计测量的比力方程可知

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \mathbf{f} + \mathbf{g} \quad (3)$$

式中 \mathbf{f} 为加速度计能测量的比力， \mathbf{g} 为引力加速度²。回顾大学物理中所学知识，在有相对旋转的两个坐标系中观察位置向量的变化情形是不一样的，其关系由 Coriolis 定理（哥氏定理）给出：

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_a = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_b + \boldsymbol{\omega}_{ab} \times \mathbf{r} \quad (4)$$

式中 a 和 b 是两个任意坐标系，二者之间存在相对角运动， b 系相对于 a 系的运动角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{ab}$ ，符号 \times 表示向量叉乘。在后续的速度微分方程推导中哥氏定理将被频繁用到。

2.1 速度微分方程

接下来我们推导惯性坐标系（ i 系）、地固坐标系（ e 系）和导航坐标系（ n 系）下的地速微分方程。

2.1.1 i 系速度微分方程

由哥氏定理可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i &= \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 表示 e 系相对于 i 系的旋转角速度向量，也即地球自转角速度向量。等式两边在 i 系下求导，可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i &= \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_i + \left. \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \right|_i \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_i + \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt} \right|_i \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i \end{aligned} \quad (6)$$

在惯性系下观察，地球自转角速度向量是不随时间变化的，即 $\left. \frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt} \right|_i = \mathbf{0}$ ，代入上式，可得

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i \quad (7)$$

将式 (3) 和 (5) 代入式 (7)，整理可得

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \quad (8)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r})$ 为地球自转产生的向心加速度。根据重力加速度的定义可知，引力加速度与向心加速度之差即地球附近的当地重力加速度向量 \mathbf{g}_p ，即

$$\mathbf{g}_p = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times (\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{r}) \quad (9)$$

²注意，不是重力加速度。

应用该符号，式 (8) 可写作

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_i = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v} + \mathbf{g}_p \quad (10)$$

上式即惯性坐标系下的地速微分方程。

2.1.2 e 系速度微分方程

由哥氏定理可得

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_e = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ei} \times \mathbf{v} \quad (11)$$

根据角速度的定义，有 $\boldsymbol{\omega}_{ie} = -\boldsymbol{\omega}_{ei}$ ，代入上式，可得

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_e = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_i - \boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v} \quad (12)$$

将式 (10) 代入上式，可得地球坐标系下的地速微分方程

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_e = \mathbf{f} - 2\boldsymbol{\omega}_{ie} \times \mathbf{v} + \mathbf{g}_p \quad (13)$$

2.1.3 n 系速度微分方程

同理，根据哥氏定理可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_n &= \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ne} \times \mathbf{v} \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_i - \boldsymbol{\omega}_{en} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (14)$$

式中， $\boldsymbol{\omega}_{en}$ 是 n 系相对于 e 系的转动角速度向量。将式 (13) 代入 (14)，整理可得导航坐标系下的地速微分方程

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_n = \mathbf{f} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}) \times \mathbf{v} + \mathbf{g}_p \quad (15)$$

2.2 n 系下的速度更新

速度向量在 i, e, n 系下的微分方程式 (10)、(13)、(15) 可写作如下统一形式。

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_F = \mathbf{f} - (\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{iF}) \times \mathbf{v} + \mathbf{g}_p, \quad F = i, e, n \quad (16)$$

惯性导航的速度更新即在选定坐标系下求解相应的地速微分方程式。惯性导航从根本上说就是已知来自于加速度计的比力（非引力加速度）测量值在特定的坐标系内（比力测量值投影在该坐标系内，且这个坐标系相对于惯性坐标系的指向通过陀螺确定）求解牛顿力学方程。接下来我们以导航系（ n 系）下的速度微分方程求解为例，推导离散时间的速度更新递推式。

将式 (15) 中向量投影至 n 系，可写作

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_n &= \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}_p^n \\ &= \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}_p^n \end{aligned} \quad (17)$$

式 (17) 可写作:

$${}^n\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}_p^n \quad (18)$$

式中 \mathbf{C}_b^n 是 b 系至 n 系的投影变换矩阵/姿态矩阵。由上式可知, 惯性导航过程需要补偿重力加速度和由 e 系、 n 系相对于 i 系旋转所引起的哥氏加速度 (Coriolis acceleration), 二者统称为“有害加速度”。速度更新就是对地速微分方程进行数字积分, 并离散化处理。可写作如下形式:

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \Delta \mathbf{v}_{f,k}^n + \Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n \quad (19)$$

式中, \mathbf{v}_{k-1}^n 和 \mathbf{v}_k^n 分别为前一历元 t_{k-1} 和当前历元 t_k 的速度向量, 且

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n \equiv \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b dt \quad (20)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n \equiv \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\mathbf{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n \right] dt \quad (21)$$

注意, 上述积分号内的各变量都是时间的函数, 在不引起歧义的情况下为书写方便省略了时间变量 t 。式中 k 表示历元时刻。 $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n$ 是与比力测量值相关的速度变化量, 称作比力积分项。 $\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n$ 是与有害加速度相关的速度变化量, 也被称为重力/哥氏积分项。下面分别推导两个积分式的具体表达式。

2.2.1 重力/哥氏积分项

在实际工程应用中, 一般对重力/哥氏积分项进行了如下两个简化/近似处理:

近似处理 1: 重力是位置的函数, 当惯导更新频率足够高时, 在 $[t_{k-1}, t_k]$ 时段内载体的位置变化幅度较小。由位置变化引起的重力变化为小量³, 且变化较为平缓。因此, 在一个积分周期内将重力向量看作常值向量, 其具体数值根据积分周期内中间时刻的位置进行计算。

近似处理 2: 容易计算, 积分项中 $(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n$ 的数值大小远小于 \mathbf{g}_p 。因此, 在一个积分周期内将 $\mathbf{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n$ 看作常值向量, 其具体数值根据积分周期内中间时刻的位置和平均速度进行计算。

引入如下符号

$$\mathbf{a}_{gc} \equiv \mathbf{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n \quad (22)$$

通过上述两个近似处理, 重力/哥氏积分项的计算可简化为如下梯形积分

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n &\approx \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{gc,k-1} + \mathbf{a}_{gc,k}) \Delta t \\ &\approx \mathbf{a}_{gc,k-1/2} \Delta t \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$\mathbf{a}_{gc,k-1/2} \triangleq \mathbf{g}_p^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n \Big|_{t_{k-1/2}} \quad (24)$$

式中, $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, $t_{k-1/2}$ 为 t_{k-1} 和 t_k 的中间时刻。 \mathbf{g}_p 和 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 是位置的函数, $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 是位置和速度的函数。 $\mathbf{a}_{gc,k-1/2}$ 表示根据 $t_{k-1/2}$ 时刻的位置和速度向量计算向量 \mathbf{a}_{gc} 。此时还没有得到时刻 t_k 的位置和速度, 因此不能通过内插只能通过外推的方式得到 $t_{k-1/2}$ 时刻的位置和速度。例如, 采用线性外推的方式得到中间时刻的速度, 方法如下:

$$\mathbf{v}_{k-1/2}^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{k-1}^n - \mathbf{v}_{k-2}^n) = \frac{3}{2} \mathbf{v}_{k-1}^n - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{k-2}^n \quad (25)$$

³例如: 假设惯导按 200 Hz 更新, 惯导速度为 100 m/s, 可算出相应的幅度。

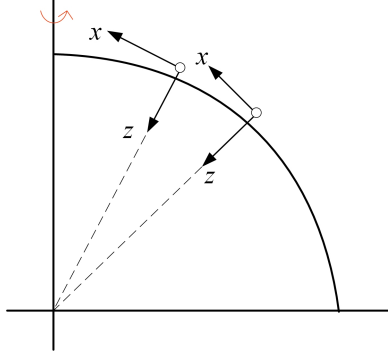


图 1: n 系 (x, y 轴跟随当地水平面, y 轴垂直纸面向里) 坐标轴的空间指向随原点位置的变化而改变

2.2.2 比力积分项

比力积分项的被积量 (比力) 在积分区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 内其大小和方向均可能发生快速的变化, 因而要考虑时变向量积分的不可交换性误差补偿。考虑导航坐标系 (n 系) 和与载体坐标系 (b 系) 在积分周期内的旋转。将比力积分项 (20) 展开如下:

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)} \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^b(t) dt \quad (26)$$

式中, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}$ 是前一时刻的姿态矩阵, 为已知量。 $\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)}$ 为 n 系变化矩阵, 即 n 系坐标轴的空间指向随原点位置的变化而改变, 如图 1 所示。当惯导更新频率足够高, 在很短的积分区间内由位置变化带来的 n 系的转动为小量。因此, 对上述积分项的处理思路是: 对 $\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)}$ 做近似处理, 并与 $\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}$ 一同拿到积分号外。

速度更新近似处理 3: 由于 n 系的转动为小量, 变化缓慢, 在积分周期内将其简化为如下常值矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k-1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

将式 (27) 代入 (26), 并将常值矩阵提至积分号外, 得

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^b(t) dt \quad (28)$$

如前所述, 在积分区间内 n 的转动为小量。矩阵 $\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}$ 可以用相应的等效旋转矢量来表示, 并在小角度假设下取至一阶近似, 得

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} \approx \mathbf{I} - (\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)} \times) \quad (29)$$

式中 $\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)}$ 为 $n(k-1)$ 系转动到 $n(k)$ 系对应的等效旋转矢量。易知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)} &\approx \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{n(k-1)n(t)} dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{n(k-1)i} + \boldsymbol{\omega}_{in(t)} dt \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{in} dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en} dt \\ &\approx (\boldsymbol{\omega}_{ie,k-1/2} + \boldsymbol{\omega}_{en,k-1/2}) \Delta t \end{aligned} \quad (30)$$

注意，式中 $n(k-1)$ 为前一历元的导航坐标系，是已知的，可看作与惯性坐标系 (i 系) 固结，因而有 $\boldsymbol{\omega}_{n(k-1)i} = \mathbf{0}$ 。 $\boldsymbol{\omega}_{ie,k-1/2}, \boldsymbol{\omega}_{en,k-1/2}$ 下标中的 $k-1/2$ 是 t_{k-1} 到 t_k 的中间时刻，表示用中间时刻的导航状态量（位置和速度）计算 $\boldsymbol{\omega}_{ie}, \boldsymbol{\omega}_{en}$ 。

定义以下符号（我们称之为 b 系比力积分项）

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \equiv \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^b(t) dt \quad (31)$$

则式 (28) 可写作：

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2} \left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \quad (32)$$

将式 (29) 代入式 (32) 可得

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n = \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\zeta}_{n(k-1)n(k)} \times) \right] \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \quad (33)$$

接下来将推导 $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$ 的具体表达式。

2.2.3 b 系比力积分项

将 $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$ 积分项内的矩阵 $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}$ 用等效旋转矢量来表示，有如下转换关系：

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi(t)}{\phi(t)} (\boldsymbol{\phi}(t) \times) + \frac{1 - \cos \phi(t)}{\phi(t)^2} (\boldsymbol{\phi}(t) \times) (\boldsymbol{\phi}(t) \times) \quad (34)$$

式中 $\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}_{b(k-1)b(t)}$ 表示 b 系从 t_{k-1} 转动到 $t \in [t_{k-1}, t_k]$ 对应的等效旋转矢量，在不引起歧义的情况下为书写方便，在 (34) 中省略了其下标。 $[\boldsymbol{\phi}(t) \times]$ 表示 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 对应的反对称矩阵。 $\phi(t)$ （不加粗）表示旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}(t)$ （加粗）的模长，也即转动的角度大小。

速度更新近似处理 4: 对等效旋转矢量的模作小量假设（假设惯导更新频率足够高，以保证 ϕ 是一个合理的小量，例如不大于 0.05 rad），则有 $\sin \phi / \phi \approx 1$ ，同时忽略等式 (34) 右边第三项（ ϕ 的二阶项），可得

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + [\boldsymbol{\phi}(t) \times] \quad (35)$$

速度更新近似处理 5: 在工程实践中，常在更新周期内将等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 进一步近似为陀螺的角增量输出 $\Delta \boldsymbol{\theta}(t)$ ，即

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + [\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times] \quad (36)$$

式中陀螺角增量 $\Delta \boldsymbol{\theta}(t)$ 定义如下⁴：

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^t \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(\tau) d\tau \quad (37)$$

将式 (36) 代入 (31)，可得

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\mathbf{I} + (\Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times)] \mathbf{f}^b(t) dt \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}^b(t) dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^b(t) dt \\ &= \Delta \mathbf{v}_k + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta \boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{f}^b(t) dt \end{aligned} \quad (38)$$

⁴注意，积分上限是 t ，不是 t_k

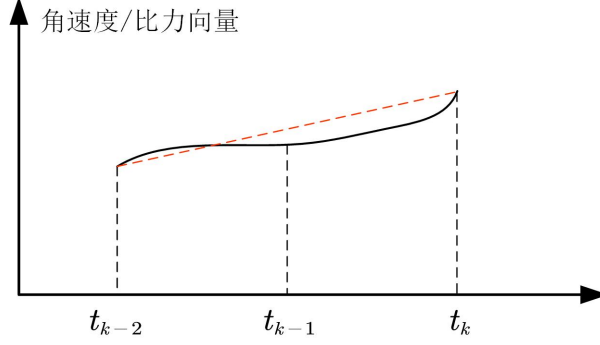


图 2: 双子样假设示意图

式中 $\Delta \mathbf{v}_k$ 为加速度计输出的速度增量测量值。上式中的积分项难以进一步化简，需对积分区间内角速度和比力向量做不同假设，来逼近载体的真实角运动和线运动。常用假设包括：

单子样假设：假设在积分时段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内， $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ ， \mathbf{f}^b 均为为常向量（方向和大小均不变），即

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_{k-1}), \quad \mathbf{f}^b(t) = \mathbf{f}^b(t_{k-1}) \quad (39)$$

双子样假设：假设在积分时段 $[t_{k-2}, t_k]$ ⁵内， $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ ， \mathbf{f}^b 随时间线性变化，即

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}(t - t_{k-1}), \quad \mathbf{f}^b(t) = \mathbf{c} + \mathbf{d}(t - t_{k-1}) \quad (40)$$

三子样假设：假设在积分时段 $[t_{k-3}, t_k]$ 内， $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ ， \mathbf{f}^b 随时间的二次方变化，即

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}(t - t_{k-1}) + \mathbf{c}(t - t_{k-1})^2, \quad \mathbf{f}^b(t) = \mathbf{c} + \mathbf{d}(t - t_{k-1}) + \mathbf{e}(t - t_{k-1})^2 \quad (41)$$

下面以双子样算法为例，推导速度更新方程。双子样假设： $[t_{k-2}, t_k]$ 时段内角速度观测量和比力观测均随时间线性变化。如图 2 所示，在两个采样区间内，将实际的角速度和比力（黑色曲线）近似为随时间线性变化（曲线简化为直线，红色虚线，黑色曲线下的积分面积为惯性传感器实际输出的角增量或速度增量）。上式表明，线性假设的系数 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 、 \mathbf{d} 不但决定了角速度和比力的大小，同时还决定了其方向，也即线性假设也考虑了角速度向量和比力向量的方向变化。

根据陀螺和加速度计增量输出定义，有

$$\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^t \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(\tau) d\tau \quad (42)$$

$$\Delta \mathbf{v}(t) = \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{f}^b(\tau) d\tau \quad (43)$$

回顾姿态的双子更新，只要已知前一时刻和当前时刻的陀螺增量输出 $\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1}$ 、 $\Delta \boldsymbol{\theta}_k$ ，即可求解系数 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 。同理，已知 $\Delta \mathbf{v}_{k-1}$ 、 $\Delta \mathbf{v}_k$ ，即可求解系数 \mathbf{c} 和 \mathbf{d} 。易得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \Delta \boldsymbol{\theta}_k}{2T}, & \mathbf{b} &= \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_k - \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1}}{T^2} \\ \mathbf{c} &= \frac{\Delta \mathbf{v}_{k-1} + \Delta \mathbf{v}_k}{2T}, & \mathbf{d} &= \frac{\Delta \mathbf{v}_k - \Delta \mathbf{v}_{k-1}}{T^2} \end{aligned} \quad (44)$$

⁵注意，不是 $[t_{k-1}, t_k]$

式中 T 表示时间间隔, $T = t_k - t_{k-1} = t_{k-1} - t_{k-2}$ 。将式 (40) 中 ω_{ib}^b 表达式代入式 (42), 可得

$$\begin{aligned}\Delta\theta(t) &= \int_{t_{k-1}}^t \omega_{ib}^b(\tau) d\tau = \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{a} + \mathbf{b}(\tau - t_{k-1}) d\tau \\ &= \mathbf{a}(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}(t - t_{k-1})^2\end{aligned}\quad (45)$$

将式 (44)、(45) 代入等式 (38) 右边积分项, 整理可得

$$\begin{aligned}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta\theta(t) \times \mathbf{f}^b(t) dt &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\mathbf{a}(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}(t - t_{k-1})^2 \right] \times \left[\mathbf{c} + \mathbf{d}(t - t_{k-1}) \right] dt \\ &= \frac{T^2}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \frac{T^3}{3}\mathbf{a} \times \mathbf{d} + \frac{T^3}{6}\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \frac{T^4}{8}\mathbf{b} \times \mathbf{d}\end{aligned}\quad (46)$$

将式 (44) 代入式 (46), 整理可得

$$\begin{aligned}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta\theta(t) \times \mathbf{f}^b(t) dt &= \frac{T^2}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \frac{T^3}{3}\mathbf{a} \times \mathbf{d} + \frac{T^3}{6}\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \frac{T^4}{8}\mathbf{b} \times \mathbf{d} \\ &= \frac{1}{2}\Delta\theta_k \times \Delta\mathbf{v}_k + \frac{1}{12}(\Delta\theta_{k-1} \times \Delta\mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}_{k-1} \times \Delta\theta_k)\end{aligned}\quad (47)$$

上式在整理过程中需注意对于任意向量 \mathbf{v} 、 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 有: $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, 且 $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$ 。将式 (47) 代入式 (38), 可得

$$\Delta\mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta\mathbf{v}_k + \frac{1}{2}\Delta\theta_k \times \Delta\mathbf{v}_k + \frac{1}{12}(\Delta\theta_{k-1} \times \Delta\mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}_{k-1} \times \Delta\theta_k)\quad (48)$$

上面等式右边第二项和第三项分别称作旋转效应补偿项和划桨效应补偿项。

2.2.4 双子样速度更新算法整理

双子样速度更新的公式可整理如下:

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \Delta\mathbf{v}_{f,k}^n + \Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n\quad (49a)$$

$$\Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n = [\mathbf{g}_p^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \mathbf{v}^n]_{t_{k-1/2}} \Delta t\quad (49b)$$

$$\Delta\mathbf{v}_{f,k}^n = \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2}(\zeta_{n(k-1),n(k)} \times) \right] \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta\mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}\quad (49c)$$

$$\zeta_{n(k-1),n(k)} = (\omega_{ie} + \omega_{en})_{t_{k-1/2}} \Delta t\quad (49d)$$

$$\Delta\mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta\mathbf{v}_k + \frac{1}{2}\Delta\theta_k \times \Delta\mathbf{v}_k + \frac{1}{12}(\Delta\theta_{k-1} \times \Delta\mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}_{k-1} \times \Delta\theta_k)\quad (49e)$$

3 位置更新算法

载体的位置可用大地坐标（纬度 φ 、经度 λ 和椭球高 h ）来表示。位置随时间的变化可用下面一组微分方程来描述：

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R_M + h} \quad (50)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R_N + h) \cos \varphi} \quad (51)$$

$$\dot{h} = -v_D \quad (52)$$

式中 R_M 、 R_N 分别为载体所在位置的子午圈半径和卯酉圈半径。 v_N 、 v_E 和 v_D 为载体速度向量在 n 系北向、东向和竖直向下三个方向上的投影分量。

从以上三式可以看出，更新经纬度需要用到高程，而更新经度需要用到纬度，因此按照高程、纬度和经度的顺序对位置坐标进行离散化更新。求解高程微分方程，有

$$h_k = h_{k-1} - \int_{t_{k-1}}^{t_k} v_D(t) dt \quad (53)$$

注意，上式等号右边第二项符号为负是因为高程是以向上为正方向，而 v_D 是以向下为正方向。

位置更新近似处理 1： 假设积分周期内 v_D 随时间线性变化，式 (53) 的积分简化为梯形积分：

$$h_k = h_{k-1} - \frac{1}{2}(v_{D,k-1} + v_{D,k})(t_k - t_{k-1}) \quad (54)$$

式中 $v_{D,k-1}$ 和 $v_{D,k}$ 分别表示 t_{k-1} 和 t_k 时刻的垂向速度。

位置更新近似处理 2： 更新纬度时，在积分周期内忽略子午圈半径 R_M 随纬度（和时间）的变化，简化为常值，高程 h 在积分周期内简化为常值，令其等于积分周期内的平均高程。有

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{v_{N,k} + v_{N,k-1}}{2(R_{M,k-1} + \bar{h})}(t_k - t_{k-1}) \quad (55)$$

式中 $R_{M,k-1}$ 表示用 t_{k-1} 时刻的位置计算子午圈半径 R_M 。 $\bar{h} = (h_k + h_{k-1})/2$ 。同理，更新经度

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{v_{E,k} + v_{E,k-1}}{2(R_{N,k-1/2} + \bar{h}) \cos \bar{\varphi}}(t_k - t_{k-1}) \quad (56)$$

式中， $R_{N,k-1/2}$ 表示用中间时刻的纬度计算 R_N ， $\bar{h} = \frac{1}{2}(h_k + h_{k-1})$ ， $\bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k-1})$ 。

附录

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_e \end{bmatrix}^T \quad (57)$$

$$R_M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (58)$$

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}} \quad (59)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_e \cos \varphi & 0 & -\omega_e \sin \varphi \end{bmatrix}^T \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_N + h} & \frac{-v_N}{R_M + h} & -\frac{v_E \tan \varphi}{R_N + h} \end{bmatrix}^T \quad (61)$$

式中, ω_e 为地球自转角速度大小, φ 为纬度 (单位弧度), v_E, v_N 分别为东向和北向速度。 R_M 和 R_N 分别为子午圈半径和卯酉圈半径。 a 为地球椭球长半轴, e 为地球椭球模型第一偏心率, 对于 CGCS2000 椭球, $\omega_e = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, $a = 6378137.0 \text{ m}$, $e = 0.08181919104$ 。